

Приложение к журналу

# КВАНТ

№3/2001

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

Бюро



Квантум

## ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

*Составители В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан*



---

Москва 2001  
Бюро Квантум

УДК 373.167.1:53  
ББК 22.1  
Ф50

Приложение  
к журналу «Квант»  
№3/2001

**Ф50 Физический факультатив**/Составители В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан — М.: Бюро Квантум, 2001. — 128 с.  
(Прил. к журналу «Квант» №3/2001)  
ISBN 5-85843-031-7

Книга представляет собой сборник статей, опубликованных в журнале «Квант» в рубрике «Физический факультатив». Статьи предназначены школьникам, проявившим интерес к тонким вопросам, нетривиальным задачам и физическим парадоксам.

Для учащихся и преподавателей средних школ, лицеев и гимназий, физических кружков и факультативов, а также для всех тех, кому просто интересна физика.

ББК 22.1

ISBN 5-85843-031-7

© Бюро Квантум  
«Квант», 2001

# СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
<b>МЕХАНИКА</b>	
Всплывающий воздушный пузырек и закон Архимеда. <i>Г.Коткин</i>	5
О законах Кеплера. <i>А.Черноуцан</i>	11
Под каким углом отскочит мяч? <i>С.Хорозов</i>	15
Куда проскользнет палочка? <i>А.Черноуцан</i>	22
Палочка продолжает падать... <i>А.Черноуцан</i>	26
Вихри над взлетной полосой. <i>А.Стасенко</i>	32
Сверхзвук на кончике бича. <i>Г.Меледин</i>	38
Случай в газовой туманности. <i>А.Стасенко</i>	43
Математический маятник на наклонных поверхностях. <i>П.Хаджи, А.Михайленко</i>	49
Возвращающая сила и частота колебаний системы. <i>П.Хаджи, Л.Глазова, В.Личман</i>	54
Гравитационная машина. <i>А.Самбелашвили</i>	62
<b>МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕПЛОТА</b>	
Как зависит $U$ от $p$ ? <i>А.Черноуцан</i>	67
Внутренняя энергия идеального газа. <i>А.Черноуцан</i>	72
<b>ЭЛЕКТРОДИНАМИКА</b>	
Принцип суперпозиции и напряженность электрического поля. <i>Д.Александров</i>	81
Поле заряженной плоскости. <i>Д.Александров</i>	85
Распределение заряда на тонком диске. <i>А.Черноуцан</i>	89
Метод электростатических изображений. <i>А.Черноуцан</i>	94
Поляризованный диэлектрик и его энергия. <i>Е.Выродов, В.Слепнев</i>	101
Идеальные проводники и кинетическая индуктивность. <i>С.Гордюнин</i>	109
Осторожно: магнитное поле. <i>А.Черноуцан</i>	114
Давление поля. <i>А.Черноуцан</i>	122

## **ПРЕДИСЛОВИЕ**

**«Физический факультатив»** – самый молодой раздел журнала **«Квант»** – он родился пять лет назад, в 1996 году. Статьи этого раздела предназначены школьникам, проявившим интерес к тонким вопросам, нетривиальным задачам и физическим парадоксам. Статьи ориентированы, в первую очередь, на учеников физико-математических классов и школ, на физические кружки и факультативы. Однако по объему требуемых знаний они не выходят за рамки школьной программы по физике (или снабжены необходимыми комментариями) и могут быть использованы учителями для дополнительной работы с любым учеником, интересующимся физикой и готовящимся к поступлению в вуз физического профиля.

## ВСПЛЫВАЮЩИЙ ВОЗДУШНЫЙ ПУЗЫРЕК И ЗАКОН АРХИМЕДА

*Г. Коткин*

Представьте себе, что вы готовитесь к экзамену по физике, расположившись на лесной опушке на берегу озера. Повторяя второй закон Ньютона, вы хотите применить этот закон к движению всплывающих со дна пузырьков газа. И тут начинается что-то странное...

Сила тяжести, действующая на пузырек, раз в тысячу меньше веса вытесняемой им воды (плотности воздуха и воды отличаются примерно в тысячу раз), т.е. архимедовой силы. Сила сопротивления, при жидком трении пропорциональная скорости пузырька, поначалу мала, поэтому ее учитывать не стоит (о роли силы сопротивления будет сказано дальше). Таким образом, ускорение определяется, в основном, архимедовой выталкивающей силой:

$$a = \frac{V\rho g - mg}{m} \approx \frac{V\rho g}{m}. \quad (1)$$

Здесь  $m$  — масса пузырька,  $V$  — его объем,  $\rho$  — плотность воды. Пусть плотность газа  $\rho_0$ . Тогда  $m = V\rho_0$ , и

$$a \approx \frac{\rho}{\rho_0} g \approx 10^3 g.$$

Итак, ускорение пузырька порядка тысячи  $g$ . Это очень большая величина. (Вспомним, что ускорение, которое приходится переносить космонавтам и летчикам, достигает нескольких  $g$ , скажем до  $10g$ .) Если снаряд будет двигаться в стволе длиной 1 м с таким ускорением, то он сможет взлететь на высоту 1 км (проверьте это самостоятельно); если внутрь нашего всплывающего пузырька попадет букашка, она будет раздавлена в таком

---

Опубликовано в «Кванте» №3 за 1996 год.

«лифте»; и т.д. Поистине богатые возможности для изобретателей!

Впрочем, сидя на берегу озера, можно увидеть собственными глазами, что на самом деле ускорение пузырька вовсе не так велико. Вместо того чтобы сразу дать ответ на возникшую загадку, зададим еще одну.

Пусть вы без труда можете поднять пудовую гирю, т.е. гирию массой 16 кг, на высоту 1 м. А что если приложить силу, равную весу этой гири, к камешку массой 1 г (или к копеечной монете) на пути тоже в 1 м? Нетрудно сообразить, что камешек после этого взлетит на высоту 16 км. (Сопротивление воздуха не учитываем. Ясно, что дело не в нем.) Что это — еще один фантастический проект? Нет, на этот раз разоблачить автора проекта совсем легко: поднимать придется не только камешек, но и собственную руку! К каждому ее грамму нужно приложить силу порядка 160 Н. Вся рука будет «весить» несколько тонн, и поднять ее не хватит сил. Таким образом, неподвижная или движущаяся с небольшим ускорением рука может приложить к грузу гораздо большую силу, чем рука, которая движется с большим ускорением.

Но ведь при движении воздушного пузырька в воде возникает аналогичная картина. Когда пузырек поднимается, некоторая масса воды устремляется вниз, заполняя освобожденное место. Пузырек взаимодействует с движущейся, а не с неподвижной водой. По-видимому, и сила, действующая со стороны воды на пузырек, зависит от ускорения самой воды.

Закон Архимеда, записанный в обычном виде  $F_{\text{выт}} = V\rho g$ , неприменим к пузырьку, движущемуся ускоренно!

Оказывается, задача о пузырьке очень близка к задаче о движении грузиков, связанных переброшенной через неподвижный блок нитью (рис.1). Нетрудно увидеть аналогию между ними. Действительно, один из грузиков (массой  $m$ ) как бы играет роль пузырька, другой (массой  $M$ ) — роль воды, а натяжение нити ( $T$ ) — роль выталкивающей силы.

Второй закон Ньютона в применении к грузику массой  $m$  можно записать так:

$$ma = T - mg. \quad (2)$$

Если грузик массой  $m$  удерживать, то

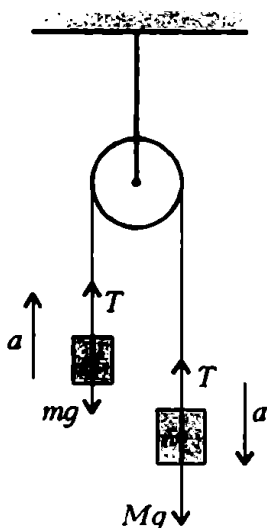


Рис. 1

натяжение нити  $T$  окажется численно равным весу другого грузика  $Mg$  (весу «вытесненной» воды). Подставив  $T = Mg$  в уравнение (2), получаем

$$a = \frac{M - m}{m} g \text{ (неверно!)}. \quad (3)$$

При  $M \gg m$  оказывается, что  $a \gg g$ . Этот вывод своей нелепостью похож на вывод об огромном ускорении пузырька (см. выражение (1)). Причина обеих ошибок одна и та же: необходимо учитывать движение грузика массой  $M$  и движение «вытесненной» воды. Напомним, что для правильного решения задачи о грузиках нужно записать еще уравнение второго закона Ньютона для грузика массой  $M$ :

$$Ma = Mg - T \quad (4)$$

и решить систему уравнений (2) и (4). Отсюда

$$a = \frac{M - m}{M + m} g, \quad (5)$$

$$T = \frac{2mM}{M + m} g.$$

При  $M \gg m$  получается, что  $a \approx g$ ,  $T \ll Mg$ , и это вполне соответствует действительности.

Можно решить эту задачу и другим способом — воспользоваться законом сохранения энергии. При смещении грузика массой  $m$  вверх и, соответственно, грузика массой  $M$  вниз на расстояние  $h$  потенциальная энергия системы уменьшится на величину  $Mgh - mgh$ . Кинетическая энергия увеличится на величину  $mv^2/2 + Mv^2/2$ , где  $v$  — скорость грузиков (начальную скорость считаем равной нулю). Приравняв изменения энергии:

$$Mgh - mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mv^2}{2},$$

находим

$$v^2 = 2 \frac{M - m}{M + m} gh,$$

или (см. равенство (5))

$$v^2 = 2ah. \quad (6)$$

Такая связь скорости и перемещения характерна для движения с постоянным ускорением. (В нашем случае  $a =$



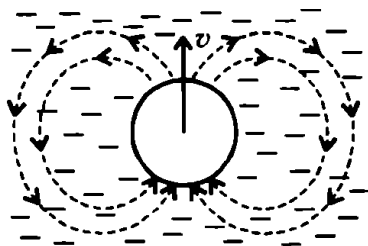


Рис. 2

$= (M - m)g / (M + m)$ .) Воспользуемся этим для решения задачи о движении тела в жидкости. Правда, привести полное решение задачи о воздушном пузырьке мы не сможем. Дело в том, что распределение скоростей жидкости вокруг пузырька слишком сложное (рис.

2). Однако мы решим похожую задачу.

Рассмотрим движение длинного стержня радиусом  $r$ , длиной  $l$  и массой  $m$  вдоль оси заполненной жидкостью плотностью  $\rho$  трубки радиусом  $R \ll l$  (рис. 3). В этом случае движение жидкости легко рассчитать. Вытесняемая верхней частью стержня жидкость смещается вниз и заполняет место, освобождаемое нижней частью стержня.

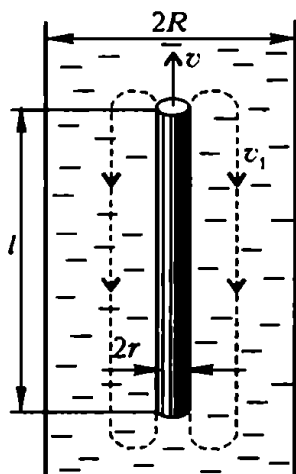


Рис. 3

Если исключить небольшие участки вблизи торцов стержня, то скорость жидкости всюду между стержнем и стенками трубки оказывается одной и той же. Обозначим через  $v$  скорость стержня, а через  $v_1$  — скорость воды, движущейся между стержнем и стенками трубки, в тот момент, когда стержень поднят на высоту  $h$  от уровня, на котором его скорость была равна нулю. Приравняв объем  $\pi r^2 v \Delta t$  жидкости, вытесненной стержнем за малый промежуток времени  $\Delta t$ , объему  $\pi(R^2 - r^2)v_1 \Delta t$  жид-

кости, прошедшей за это же время между стержнем и трубкой, находим

$$v_1 = \frac{r^2}{R^2 - r^2} v.$$

За время, пока стержень поднимется на высоту  $h$ , масса жидкости, равная  $V\rho$  (здесь  $V = \pi r^2 l$  — объем стержня), опустится на  $h$ , тогда уменьшение потенциальной энергии стержня и жидкости будет равно  $V\rho gh - mgh$ . Кинетическая же энергия системы будет равна  $mv^2/2 + m_1 v_1^2/2$ , где  $m_1$  — масса движущейся жидкости. Кинетическую энергию жидкости удобно

записать в виде

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{\pi(R^2 - r^2)l\rho}{2} v_1^2 = \frac{V\rho r^2}{2(R^2 - r^2)} v^2 = \frac{\Delta m v^2}{2},$$

где  $\Delta m = \frac{V\rho r^2}{R^2 - r^2}$ .

Воспользовавшись законом сохранения энергии, получим

$$V\rho gh - mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{\Delta m v^2}{2},$$

откуда

$$v^2 = 2 \frac{V\rho - m}{m + \Delta m} gh.$$

Такой зависимости скорости от перемещения отвечает движение с ускорением (см. выражение (6)), равным

$$a = \frac{V\rho - m}{m + \Delta m} g. \quad (7)$$

Следовательно, стержень движется так, будто бы его масса увеличилась на величину  $\Delta m$ , а выталкивающая сила осталась равной гидростатической архимедовой силе ( $V\rho g$ ). Величину  $\Delta m$  называют присоединенной массой. Это чисто формальное, но удобное толкование равенства (7). Формула (7) получается из неправильной формулы (1) добавлением в знаменателе слагаемого  $\Delta m$ . (Отметим, что подобным же образом формула (5) получается из (3) добавлением в знаменателе слагаемого  $M$ .)

Силу  $F_{\text{выт}}$ , с которой движущаяся жидкость действует на стержень, теперь легко получить из второго закона Ньютона:

$$ma = F_{\text{выт}} - mg, \quad F_{\text{выт}} = m(g + a) = mg \frac{V\rho + \Delta m}{m + \Delta m}. \quad (8)$$

В частности, если  $m \ll \Delta m$ , то  $F_{\text{выт}} \approx mg \frac{R^2}{r^2}$ ; при  $R \sim r$  выталкивающая сила оказывается порядка веса стержня (и не имеет отношения к весу вытесненной воды). Если же  $m \gg \Delta m$ , то  $F_{\text{выт}} \approx V\rho g$ , т.е. возвращаемся к закону Архимеда в обычном виде.

Для шарика, в частности для пузырька, расчет дает такой результат. Кинетическая энергия жидкости равна  $V\rho v^2/4$ , где  $V$  – объем шарика,  $v$  – его скорость. Тогда присоединенная масса для пузырька составляет  $\Delta m = V\rho/2$ , т.е. она равна половине

массы вытесненной воды. Пузырек всплывает с ускорением

$$a = \frac{V\rho - V\rho_0}{V\rho_0 + V\rho/2} g \approx 2g.$$

Выталкивающая сила  $F_{\text{выт}} \approx 3mg$ , т.е. приблизительно равна тройному весу неподвижного пузырька (и во много раз меньше веса вытесненной воды).

Теперь вспомним о силе сопротивления. Для пузырька газа в жидкости она определяется формулой  $F_c = 12\pi\eta rv$ , где  $r$  — радиус пузырька,  $v$  — его скорость,  $\eta$  — коэффициент вязкости среды.<sup>1</sup> С учетом силы сопротивления уравнение движения пузырька запишется так:

$$(m + \Delta m)a = V\rho g - mg - F_c. \quad (9)$$

Очевидно, что  $F_c$  уменьшает ускорение (а значит, и скорость) пузырька по сравнению с тем случаем, когда мы не учитываем сопротивление жидкости. Однако, если  $(4/3)\pi r^3 \rho g \gg 12\pi\eta rv$ , т.е. при  $v \ll r^2 \rho g / (9\eta)$ , силой сопротивления можно пренебречь. Например, если речь идет о пузырьке радиусом<sup>2</sup>  $r = 3$  мм, движущемся в воде ( $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup>,  $\eta = 1,0 \cdot 10^{-2}$  г/(см·с)), то его скорость должна быть много меньше величины  $v_0 = r^2 \rho g / (9\eta) = 10$  м/с. Прикинем, на каком пути  $h_0$  пузырек достигнет такой скорости. Для грубой оценки воспользуемся равенством  $v_0^2 = 2ah_0$ , где  $a = 3g$ :

$$h_0 = \frac{v_0^2}{6g} \approx 1,5 \text{ м.}$$

Таким образом, на пути 1,5 м силой сопротивления можно пренебречь. При этом  $v_0 = 10$  м/с — это предельная скорость, которой может достичь всплывающий пузырек газа в воде.

---

<sup>1</sup> Приведенная формула справедлива при  $\rho v r \gg \eta$ . Если  $\rho v r \ll \eta$ , коэффициент  $12\pi$  следует заменить на  $4\pi$ . Для твердого шарика при  $\rho v r \ll \eta$  коэффициент равен  $6\pi$  (формула Стокса).

<sup>2</sup> Пузырек большего радиуса не может сохранить шарообразную форму (подобно падающей дождевой капле, деформируемой силой давления воздуха).

# О ЗАКОНАХ КЕПЛЕРА

А. Черноуцан

Законы Кеплера не входят в программу курса школьной физики, их проходят в курсе астрономии. Тем не менее, законы Кеплера часто используются при решении физических задач, особенно олимпиадных, и поэтому содержание этих законов нередко знакомо школьникам «с физическим уклоном» задолго до изучения астрономии. Точнее — они обычно знают их формулировку, а вот откуда они берутся, остается покрытым мраком. А ведь известно: если сам можешь вывести формулу или закон, то он «и сердцу дороже, и рукам удобнее», т.е. и применять его будешь увереннее. В этой статье мы постараемся частично исправить положение. Частично — потому что поясним «происхождение» второго и третьего законов Кеплера, а вот первый примем без доказательства, он нам пока не по зубам.

Начнем с того, что повторим формулировку законов Кеплера, причем в современном виде:

1) Любое тело (у Кеплера — планета) в центральном поле тяготения движется по замкнутой орбите, представляющей собой эллипс, в одном из фокусов которого находится центр поля (у Кеплера — Солнце). Заметим: речь идет только о телах, совершающих финитное движение, т.е. не уходящих на бесконечность.

2) Радиус-вектор, соединяющий центр поля с движущимся телом, за одинаковые промежутки времени заметает одинаковые площади. Для количественной формулировки вводят так называемую секторную скорость тела  $s'$ , равную площади, заметаемой

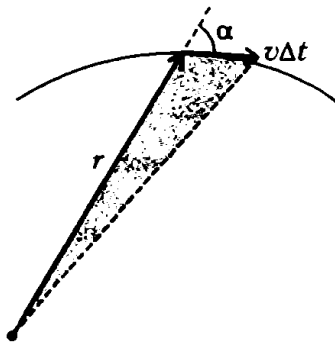


Рис. 1

за единицу времени (рис.1):

$$s' = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1}{2} v r \sin \alpha. \quad (1)$$

Другими словами, второй закон Кеплера утверждает, что секторная скорость при движении не меняется.

3) Отношение квадратов периодов обращения двух тел вокруг центра поля равно отношению кубов больших полуосей их орбит:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$$

Этот закон легко вывести для круговых орбит, где большая полуось эллипса вырождается в радиус окружности.

Теперь перечислим те факты и законы, которые нужны нам для обсуждения законов Кеплера.

Сначала — немного математики. По определению эллипс есть геометрическое место точек на плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек (фокусов эллипса) постоянна.

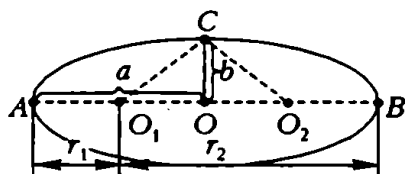


Рис. 2

Эта сумма равна большой оси эллипса  $AB = 2a$ , где точка  $A$  — самая близкая к фокусу  $O_1$ , точка  $B$  — самая от него удаленная (рис.2.). Площадь эллипса равна  $s = \pi ab$ , где  $a$  и  $b$  — большая и малая полуоси эллипса.

Теперь — физика. Потенциальная энергия материальной точки массой  $m$  в центральном поле тяготения равна

$$E_p = -G \frac{mM}{r},$$

где  $G$  — гравитационная постоянная,  $M$  — масса тела, создающего поле,  $r$  — расстояние до центра поля. (Сравните эту формулу с потенциальной энергией взаимодействия двух разноименных зарядов. Аналогия — очевидна.) Полная механическая энергия  $E$  (кинетическая плюс потенциальная) материальной точки сохраняется. Условие финитности движения имеет простой вид:  $E < 0$  (если точка уйдет на бесконечность, ее кинетическая энергия будет больше нуля или равна нулю).

Нам понадобится еще один фундаментальный закон сохранения — закон сохранения момента импульса. Напомним его определение. Момент импульса равен векторному произведению

радиуса-вектора движущейся точки, проведенного из центра поля, на ее импульс:

$$\vec{L} = [\vec{r} \cdot \vec{p}],$$

или

$$L = rmv \sin \alpha, \quad (2)$$

а направление вектора  $\vec{L}$  определяется по правилу буравчика (если вращать рукоятку буравчика от вектора  $\vec{r}$  к вектору  $\vec{p}$ , то направление движения буравчика укажет направление вектора  $\vec{L}$ ). В центральном поле момент импульса сохраняется:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[ \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{p} \right] + \left[ \vec{r} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} \right] = 0$$

(первый член равен нулю всегда, так как  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \parallel \vec{p}$ , а второй — потому что в центральном поле  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \parallel \vec{r}$ ).

Незаметно мы подошли к объяснению второго закона Кеплера. Оказывается, этот закон — просто закон сохранения момента импульса, и выполняется он (в отличие от первого и третьего) для *любого* центрального поля, а не только для поля тяготения. Секторная скорость (1) выражается через момент импульса (2) таким образом:

$$s' = \frac{L}{2m}.$$

Перейдем к третьему закону Кеплера. Период движения по эллипсу равен отношению площади эллипса к секторной скорости:

$$T = \frac{\pi ab}{s'} = \frac{2\pi ab}{L/m}.$$

Чтобы выразить  $a$  и  $b$ , напомним выражения для энергии и момента импульса для точек  $A$  и  $B$  (см. рис.2):

$$\begin{cases} \frac{mv^2}{2} - G \frac{mM}{r} = E, \\ mvr = L. \end{cases}$$

Почему эти уравнения написаны именно для точек  $A$  и  $B$ ? Да

потому, что скорость и радиус-вектор перпендикулярны друг другу (т.е.  $\sin \alpha = 1$ ) только в самой близкой и самой далекой точках. Исключая скорость, получим квадратное уравнение

$$r^2 + \frac{GM}{E/m}r - \frac{(L/m)^2}{2E/m} = 0.$$

Запишем для этого уравнения теорему Виета:

$$r_1 + r_2 = -\frac{GM}{E/m}, \quad r_1 r_2 = -\frac{(L/m)^2}{2E/m}.$$

Получаем, что большая полуось  $a = \frac{r_1 + r_2}{2}$  выражается только через энергию тела, точнее – через удельную энергию  $E/m$ :

$$a = -\frac{GM}{2E/m}.$$

Напомним, что  $E < 0$ . Обратите внимание: если  $E \rightarrow 0$ , то  $a \rightarrow \infty$ , т.е. движение становится инфинитным. Теперь найдем малую полуось  $b$  из треугольника  $O_1CO$ , где гипотенузу определим из условия  $O_1C + CO_2 = r_1 + r_2$ :

$$b^2 = \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{r_2 - r_1}{2}\right)^2 = r_1 r_2 = -\frac{(L/m)^2}{2E/m}, \quad b = \frac{L/m}{\sqrt{-2E/m}}.$$

Для периода движения получаем

$$T = 2\pi \frac{ab}{L/m} = \frac{2\pi GM}{(-2E/m)^{3/2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} a^{3/2}.$$

Итак, мы вывели третий закон Кеплера. Но попутно мы получили еще одно полезное утверждение. Оказывается, и период движения, и большая полуось эллипса однозначно связаны с удельной энергией тела  $E/m$ . Как это можно понять? Ну например, представьте себе, что из некоторой точки одновременно, но в разные стороны запущены несколько спутников с одной и той же начальной скоростью. Теперь мы знаем, что они вернутся в исходную точку одновременно. Красиво, не правда ли?

# ПОД КАКИМ УГЛОМ ОТСКОЧИТ МЯЧ?

*С.Хорозов*

В общем случае задача формулируется так. Мяч подлетает к плоскому массивному телу (бетонная стена, горизонтальная асфальтированная площадка и т.п.) под некоторым углом. При этом мяч может вращаться с некоторой угловой скоростью вокруг произвольной оси. Под каким углом он отскочит?

Несколько сузим задачу — рассмотрим случай, когда ось вращения мяча перпендикулярна плоскости его падения на стену. Привычное «угол падения равен углу отражения» придется отбросить, если мы не хотим ограничиваться тривиальным случаем, когда трения нет. Решая задачу, будем предполагать, что составляющая скорости мяча, перпендикулярная стене, в процессе столкновения меняет только знак, но не меняет своей абсолютной величины, и что учет силы тяжести не оказывает сколько-нибудь заметного влияния на ответ. Второе предположение вполне обоснованно: оценка времени отскока мяча дает несколько сотых долей секунды; это значит, что упругие силы в момент удара приблизительно на два порядка превосходят силу тяжести.

Обсудим сначала частный случай задачи: мяч со скоростью  $v_0$  подлетает к стене под углом  $90^\circ$  к ее поверхности, вращаясь с угловой скоростью  $\omega_0$  вокруг оси, параллельной стене. Пусть  $N(t)$  — зависимость от времени силы упругой реакции стены. Время будем отсчитывать от момента, когда мяч пришел в соприкосновение со стеной. Если  $\mu$  — коэффициент трения скольжения мяча по стене, то в момент времени  $t$  составляющая скорости мяча, параллельная стене, определяется формулой

$$v_x(t) = \frac{\mu}{m} \int_0^t N(t) dt,$$

где  $m$  — масса мяча. Зависимость от времени угловой скорости



мяча дается формулой

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{\mu R}{I} \int_0^t N(t) dt,$$

где  $R$  — радиус мяча, а  $I$  — его момент инерции (мы предполагаем, что удар не очень сильный и деформация мяча мала по сравнению с его радиусом). Записанные формулы справедливы только до момента времени  $\tau$ , в который закончится проскальзывание мяча по поверхности стены, — ведь мы воспользовались законом, справедливым только для силы трения скольжения. Интуитивно ясно, что при малых значениях коэффициента трения  $\mu$  проскальзывание может продолжаться в течение всего времени отскока (времени, в течение которого мяч находится в контакте со стеной), а при больших значениях  $\mu$  проскальзывание может прекратиться, когда мяч еще прижат к стене. Это значит, что в момент времени  $\tau$ , когда проскальзывание прекратилось, параллельная стене составляющая скорости мяча равна

$$v_x(\tau) = R\omega(\tau),$$

и мяч начинает просто катиться по стене. Потерями энергии мяча в процессе качения мы будем пренебрегать. Следовательно, начиная с момента времени  $\tau$  угловая скорость и  $x$ -составляющая скорости мяча постоянны. Подставив в последнее равенство выражения для  $v_x$  и  $\omega$ , получим

$$\int_0^{\tau} N(t) dt = \frac{\omega_0 R}{\frac{\mu}{m} + \frac{\mu R^2}{I}}.$$

Запишем момент инерции мяча в виде  $I = \gamma m R^2$ , где  $\gamma = 2/5$ , если мяч сплошной и однородный, и  $\gamma = 2/3$ , если мяч — надутая воздухом массивная оболочка (например, футбольный мяч). Тогда

$$\int_0^{\tau} N(t) dt = \frac{\omega_0 R m \gamma}{\mu(\gamma + 1)}.$$

Рассмотрим теперь вопрос о том, в каких случаях время проскальзывания  $\tau$  меньше времени  $T$  контакта мяча со стеной и в каких случаях — больше. Условие, что проскальзывание прекратилось не позже чем мяч перестал касаться стены, можно

записать в виде

$$\int_0^{\tau} N(t) dt \geq \int_0^{\tau} N(t) dt,$$

или, поскольку левая часть есть просто изменение перпендикулярной к стене составляющей импульса мяча, которое, в соответствии со сделанным в начале предположением, равно  $2mv_0$ ,

$$2mv_0 \geq \int_0^{\tau} N(t) dt = \frac{\omega_0 R m \gamma}{\mu(\gamma + 1)}.$$

Отсюда получаем

$$\mu \geq \frac{\omega_0 R \gamma}{2v_0(\gamma + 1)} = \mu_*$$

Если  $\mu$  больше критического значения коэффициента трения  $\mu_*$ , то время проскальзывания мяча по стене меньше времени  $T$  контакта мяча со стеной, а если  $\mu$  не больше  $\mu_*$ , то проскальзывание будет длиться в течение всего соударения. При  $\mu \geq \mu_*$  для составляющей скорости, параллельной стене, и угла отскока  $\alpha_1$  имеем

$$v_x = v_x(\tau) = \frac{\omega_0 R \gamma}{\gamma + 1}, \quad \text{tg } \alpha_1 = \frac{\omega_0 R \gamma}{v_0(\gamma + 1)},$$

а при  $\mu \leq \mu_*$

$$v_x = v_x(T) = 2\mu v_0, \quad \text{tg } \alpha_1 = 2\mu.$$

В частном случае, когда сплошной мяч (шар) катится по горизонтальной поверхности и сталкивается с вертикальной стеной,  $\omega_0 R = v_0$  и  $\mu_* = 1/7$ , поэтому при  $\mu \geq \mu_*$

$$\text{tg } \alpha_1 = \frac{\gamma}{\gamma + 1} = \frac{2}{7}, \quad \alpha_1 \approx 15,9^\circ.$$

Мы получили интересное предсказание — независимо от массы, радиуса, скорости сплошного мяча и коэффициента трения его о поверхность стены угол отскока мяча не превосходит  $16^\circ$ .

Теперь рассмотрим, как и намеревались, более общий случай — мяч подлетает к стене под углом  $\alpha_0 \neq 0$ , вращаясь с угловой скоростью  $\omega_0$  вокруг оси, перпендикулярной плоскости падения (рис.1). Будем по-прежнему

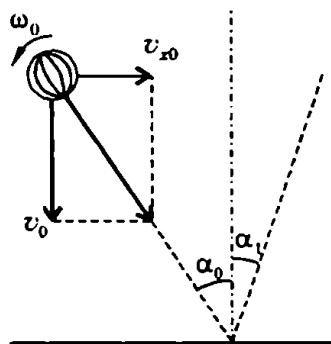


Рис. 1

считать составляющую скорости, перпендикулярную стене, равной  $v_0$ . Тогда составляющая начальной скорости, параллельная стене, равна  $v_{x0} = v_0 \operatorname{tg} \alpha_0$ . Если мяч вращается против часовой стрелки, то по аналогии с рассмотренным частным случаем можно написать

$$v_x(t) = v_{x0} - \frac{\mu}{m} \int_0^t N(t) dt,$$

$$\omega(t) = -\omega_0 + \frac{\mu R}{I} \int_0^t N(t) dt.$$

Действуя так же, как и раньше, можно найти критическое значение коэффициента трения:

$$\mu_{\kappa} = \frac{(v_{x0} + \omega_0 R) \gamma}{2v_0(\gamma + 1)},$$

$x$ -составляющую скорости мяча и угловую скорость его вращения после отскока при  $\mu \geq \mu_{\kappa}$ :

$$v_x = v_x(\tau) = \frac{v_{x0} - \omega_0 R \gamma}{\gamma + 1},$$

$$\omega = \omega(\tau) = \frac{v_{x0} - \omega_0 R \gamma}{R(\gamma + 1)}.$$

Мы не будем приводить соответствующие формулы для случая  $\mu \leq \mu_{\kappa}$  — при желании вы сможете вывести их сами.

Пришло время выяснить, насколько полученные нами формулы соответствуют опыту. Для этого было сделано два эксперимента.

**Эксперимент 1.** Мяч катится по горизонтальному столу со скоростью несколько метров в секунду, ударяется о вертикальную стену и отскакивает от нее (рис.2). Мяч — сплошной шар, обладающий очень хорошим отскоком (при падении без начальной скорости на твердое основание с высоты  $h$  он подпрыгивает на высоту, большую чем  $0,8h$ , т.е. его скорость меняется меньше чем на 10%). Диаметр мяча 3,5 см, край стола отодвинут от стены на 2,7 см. Отскочив от стены, мяч перелетает через планку, высота которой над столом может варьироваться. Планка располагается приблизи-

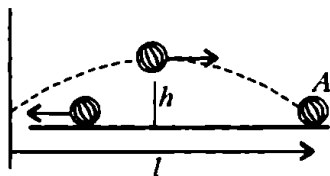


Рис. 2

т. Планка располагается приблизи-

тельно посередине между стеной и точкой стола  $A$ , в которой мяч после отскока падает на стол.

Если расстояние от стены до точки  $A$  равно  $l$  и при этом мяч перелетел (с небольшим запасом) через планку, установленную на высоте  $h$ , то угол отскока  $\alpha_1$  находится из уравнения  $\operatorname{tg} \alpha_1 = 4h/l$ . В разных измерениях  $l$  изменялось в пределах 1–1,7 м. Результат:  $\alpha_1 = 30^\circ$ , возможная ошибка:  $1,5-2^\circ$ .

Сразу бросается в глаза существенное расхождение между расчетом и результатом эксперимента. Если даже принять во внимание, что горизонтальная составляющая скорости за счет неидеально упругого столкновения уменьшается на 10%, то предсказание все равно драматически отличается от результата эксперимента. Влияние щели между столом и стеной, которая оставлена, чтобы избежать одновременного взаимодействия мяча со стеной и столом, на угол отскока незначительно (меньше одного градуса). Неучтенный в расчете эффект силы тяжести мал, да к тому же он только уменьшил бы угол отскока. В чем же дело?

Прежде чем попытаться ответить на этот вопрос, давайте посмотрим, насколько соответствует наш расчет второму эксперименту.

**Эксперимент 2.** Такой же, как и в эксперименте 1, мяч подвешен на тонкой нити длиной 130 см так, что он едва касается вертикальной стены в некоторой точке  $O$ . Мяч отводим от положения равновесия приблизительно на 60 см, устанавливаем над точкой, координаты которой относительно стены и точки  $O$  измерены, и отпускаем. Угол падения, следовательно, мы знаем. Для того чтобы измерить угол отражения, достаточно повторить опыт несколько раз и подобрать такое положение вертикального стерженька, чтобы мяч пролетел как раз над ним. Измерив координаты этого стерженька, можно найти угол отражения  $\alpha_1$  после первого отскока. Точно так же измеряется угол  $\alpha_2$  — угол отражения после второго удара о стену. Заметим, что, хотя крутящий момент нити невелик (нить тонкая), следует время от времени давать ей возможность раскрутиться.

Рассчитаем углы первого и второго отскоков мяча от стены. Перед столкновением со стеной мяч не вращался ( $\omega_0 = 0$ ) и мяч у нас сплошной ( $\gamma = 2/5$ ), поэтому после первого столкновения

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{5}{7} \operatorname{tg} \alpha_0, \quad v_{x1} = \frac{v_{x0}}{\gamma + 1}, \quad \omega_1 = \frac{v_{x0}}{R(\gamma + 1)}.$$

Отскочив от стены, мяч вскоре снова вернется к стене, знак  $x$ -составляющей его скорости изменится, а направление его враще-

ния, конечно, останется прежним. Для угла второго отскока получим

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{15}{49} \operatorname{tg} \alpha_0.$$

Численные значения рассчитанных и измеренных углов (в градусах) приведены в таблице:

$\alpha_0$	$\alpha_1$		$\alpha_2$	
	рассчит.	экспер.	рассчит.	экспер.
58,2	49,0	42	26,2	— 31
46	36,5	30	17,6	— 20
30	22,4	21	10,0	— 9

Знак «—» в последнем столбце означает, что мяч, подлетая к стене слева, отскакивает опять налево, хотя по расчету он должен отскочить направо (рис.3; здесь  $O$  — исходное положение мяча,  $1_p$  и  $2_p$  — рассчитанные направления первого и второго отскоков,  $1_z$  и  $2_z$  — экспериментальные направления отскоков, стрелки — направления вращения мяча). В чем же причина расхождения результатов расчета и эксперимента? Точного ответа у автора нет. Но все же обсудим вероятную причину расхождения.

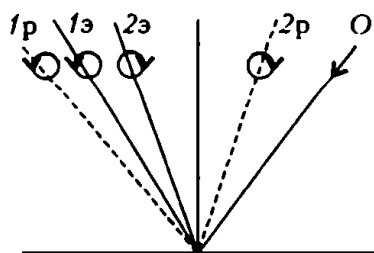


Рис. 3

Рассмотрим столкновение катящегося по столу мяча с вертикальной стеной (эксперимент 1). Начнем с вопроса: почему мы думаем, что проскальзывание мяча по поверхности стены неизбежно? Ответ: если бы проскальзывания не было, это означало бы, что мяч почти мгновенно получил вертикальную (вдоль поверхности стены) составляющую скорости, равную  $\omega_0 R$ , а это, в свою очередь, требует бесконечно большой силы трения, что нелепо. Этот ответ правилен, но только при условии, что мяч (шар) в процессе столкновения не имеет тангенциальных (направленных вдоль поверхности) деформаций. Чтобы пояснить сказанное, рассмотрим такой мысленный опыт. Имеется практически недеформируемое очень легкое кольцо. На него надето очень много маленьких (и очень легких) грузиков, соединенных невесомыми пружинками, которые без трения могут перемещать-

ся по кольцу. Масса всей системы равна сумме масс грузиков. Кольцо, вращаясь с угловой скоростью  $\omega_0$  вокруг оси, параллельной стене, подлетает к стене под углом  $90^\circ$  и сталкивается со стеной (все, как с мячиком в эксперименте 1). Будут ли проскальзывать грузики по стене? Вовсе не обязательно. Точнее, время проскальзывания может оказаться во много раз меньше времени соударения кольца со стеной. Ведь сила реакции опоры, а следовательно, и сила трения определяются изменением нормальной к стене составляющей импульса очень большого числа грузиков, а остановить надо один или несколько грузиков, которые касаются стены. Это может произойти за очень малое, по сравнению со всем временем отскока, время. Остальные (не находящиеся в контакте со стеной) грузики продолжают двигаться по инерции, сжимая и растягивая соединяющие их с соседями пружинки. Это значит, что трение скольжения может быстро смениться трением покоя, и, следовательно, потери энергии вращения кольца на нагревание будут незначительными. За счет этой сэкономленной энергии кольцо в целом и приобретает большую, чем в случае недеформируемого и относительно долго проскальзывающего по стене кольца, вертикальную составляющую скорости.

Итак, гипотезу о причине расхождения «стандартного» решения задачи об угле отскока мяча с опытом можно сформулировать так: за счет тангенциальной деформации мяча в процессе удара о стенку проскальзывание мяча прекращается существенно раньше, чем дают выведенные нами формулы, и значительная часть энергии вращения переходит в кинетическую энергию, связанную с движением мяча вдоль стены. Попробуем проверить нашу гипотезу. Вычислим угол отскока мяча в условиях эксперимента 1, предполагая, что вся энергия вращения переходит в энергию вертикального поступательного движения. Из равенства

$$\frac{I\omega_0^2}{2} = \frac{mv_x^2}{2}$$

получаем

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{v_x}{v_0} = \sqrt{\frac{2}{5}}, \text{ и } \alpha_1 \approx 32,3^\circ.$$

Этот результат немного больше экспериментально измеренного, что вполне естественно, так как кратковременное проскальзывание, видимо, все-таки есть. Во всяком случае, это довольно веский аргумент в пользу рассмотренной гипотезы.

# КУДА ПРОСКОЛЬЗНЕТ ПАЛОЧКА?

*А. Черноуцан*

Поставим тонкую палочку вертикально на горизонтальную плоскость и отпустим. Палочка начнет падать, а ее нижний конец через некоторое время сдвинется с места и будет скользить по плоскости. Можно ли заранее предсказать, куда сдвинется нижний конец – в ту же сторону, куда упадет палочка, или в противоположную?

В одном случае ответ хорошо известен: если трения нет, то палочка сразу же начнет проскальзывать в сторону, противоположную падению. Объяснение очень простое – в отсутствие горизонтальных внешних сил центр масс палочки может смещаться только по вертикали. Можно ожидать, что при малом трении направление проскальзывания будет таким же, причем начнется проскальзывание при небольшом отклонении палочки от вертикали. А вот при достаточно большом трении ответ уже не столь очевиден. Интуитивно чувствуется, что если палочка не начнет проскальзывать при небольших углах отклонения, то потом за счет приобретенной горизонтальной скорости она скорее проскользнет вперед, по движению (верхняя часть палочки «потянет» за собой нижнюю). Чтобы проверить такое предположение, проведем расчет движения палочки и найдем, при каком наклоне палочки начнется проскальзывание и куда будет в этот момент направлена сила трения (она всегда направлена против направления проскальзывания).

Для проведения расчетов нам понадобятся некоторые простые сведения из динамики твердого тела. Во-первых, при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси выполняется уравнение динамики

$$M = I\epsilon,$$

где  $M$  – момент внешних сил относительно оси вращения,  $\epsilon$  – угловое ускорение, а  $I$  – момент инерции тела относительно оси.

---

Опубликовано в «Кванте» №4 за 1998 год.

Это уравнение для описания вращательного движения играет такую же роль, как второй закон Ньютона – для поступательного. В случае если ось вращения проходит через конец палочки, ее момент инерции равен  $I = ml^2/3$ , где  $m$  – масса и  $l$  – длина палочки. Во-вторых, кинетическая энергия вращающегося твердого тела равна  $I\omega^2/2$ , где  $\omega$  – угловая скорость вращения.

Построим решение следующим образом. Сначала будем считать, что нижний конец палочки прикреплен к плоскости шарниром, и найдем зависимость силы реакции в шарнире от угла наклона палочки  $\alpha$  (не беспокоясь о проскальзывании или отрыве от плоскости). Вертикальную составляющую силы реакции обозначим  $\vec{N}$ , а горизонтальную  $\vec{F}_{\text{тр}}$  (рис. 1). Положительное направление для  $\vec{N}$  выберем вверх, а для  $\vec{F}_{\text{тр}}$  – вправо, в сторону падения. Найдя зависимости  $N(\alpha)$  и  $F_{\text{тр}}(\alpha)$  при всех  $\alpha$ , мы сможем установить, при каком угле в первый раз выполнится условие проскальзывания

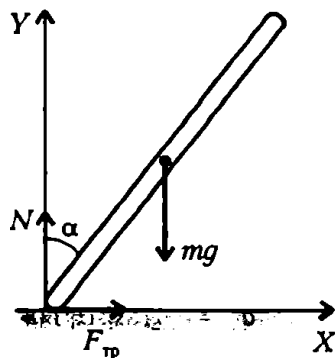


Рис. 1

$$|F_{\text{тр}}(\alpha)| = \mu N(\alpha),$$

где  $\mu$  – коэффициент трения.

Чтобы найти  $F_{\text{тр}}$  и  $N$ , запишем второй закон Ньютона в проекциях на оси  $X$  и  $Y$ :

$$F_{\text{тр}} = ma_x, \quad N - mg = ma_y.$$

При падении палочки ее центр масс движется по окружности радиусом  $l/2$ . Пусть в тот момент, когда палочка составляет угол  $\alpha$  с вертикалью, ее угловая скорость равна  $\omega$ , а угловое ускорение равно  $\epsilon$ . Тогда нормальное (центростремительное) ускорение центра масс равно  $a_n = \omega^2 l/2$ , а тангенциальное ускорение (направленное по касательной к окружности) равно  $a_t = \epsilon l/2$  (рис. 2). Отсюда получаем проекции ускорения  $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$  на гори-

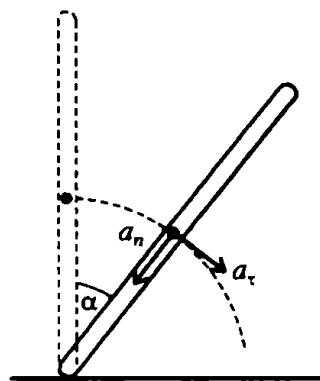


Рис. 2



зонтальную и вертикальную оси:

$$a_x = \epsilon \frac{l}{2} \cos \alpha - \omega^2 \frac{l}{2} \sin \alpha, \quad a_y = -\epsilon \frac{l}{2} \sin \alpha - \omega^2 \frac{l}{2} \cos \alpha.$$

Нам осталось только определить зависимости  $\epsilon$  и  $\omega^2$  от угла  $\alpha$ . Для этого запишем закон динамики вращательного движения палочки:

$$mg \frac{l}{2} \sin \alpha = \frac{ml^2}{3} \epsilon$$

и закон сохранения энергии:

$$mg \frac{l}{2} (1 - \cos \alpha) = \frac{ml^2}{3} \frac{\omega^2}{2}.$$

Тогда для проекций ускорения получаем следующие выражения:

$$a_x = \frac{9}{4} g \sin \alpha \left( \cos \alpha - \frac{2}{3} \right), \quad a_y = \frac{9}{4} g \left( \cos \alpha - \frac{1}{3} \right)^2 - g,$$

откуда находим  $F_{\text{тр}}$  и  $N$ :

$$F_{\text{тр}} = \frac{9}{4} mg \sin \alpha \left( \cos \alpha - \frac{2}{3} \right), \quad N = \frac{9}{4} mg \left( \cos \alpha - \frac{1}{3} \right)^2.$$

Проанализируем полученные выражения, считая теперь нижний конец палочки свободным. Видно, что при угле  $\alpha_1 = \arccos(2/3) \approx 48^\circ$  сила трения меняет знак. Значит, если проскальзывание начнется при угле меньше  $\alpha_1$ , то оно будет происходить против направления падения. Если же в интервале углов  $0 < \alpha < \alpha_1$  палочка не начнет проскальзывать, то в итоге она проскользнет в сторону падения.

А почему мы так уверены, что палочка вообще начнет проскальзывать? Это следует из выражения для  $N$ : поскольку при  $\alpha_2 = \arccos(1/3) \approx 71^\circ$  сила реакции обращается в ноль, то при любом коэффициенте трения условие проскальзывания  $|F_{\text{тр}}| = \mu N$  наступит при угле меньше  $\alpha_2$ .

Чтобы выяснить, как зависит угол отклонения палочки в момент проскальзывания от коэффициента трения  $\mu$ , надо решить уравнение

$$\mu = \frac{|F_{\text{тр}}|}{N} = \frac{|\sin \alpha (\cos \alpha - 2/3)|}{(\cos \alpha - 1/3)^2}.$$

Функция, стоящая в правой части уравнения, изображена на

рисунке 3. Эта функция имеет один максимум при угле  $\alpha_0$ , положение которого можно найти численным расчетом. Правда, если вы наберетесь терпения и возьмете производную по  $\alpha$ , то в конце вас ждет награда: условие максимума сводится к уравнению  $\cos \alpha_0 = 9/11$ . Значение функции в максимуме равно  $\mu_0 = 15\sqrt{10}/128 \approx 0,37$ .

Пора делать выводы. Из рисунка 3 следует, что при  $0 < \mu < \mu_0 \approx 0,37$  уравнение  $|F_{тр}| = \mu N$  имеет три решения, из которых началу проскальзывания соответствует наименьший угол, лежащий в интервале  $0 < \alpha < \alpha_0$ , где  $\alpha_0 = \arccos(9/11) \approx 35^\circ$ . При  $\mu < \mu_0$  проскальзывание происходит в сторону, противоположную падению, а при  $\mu > \mu_0$  проскальзывание будет происходить в сторону падения при угле наклона, лежащем в интервале  $\alpha_3 < \alpha < \alpha_2$  ( $\alpha_2 = \arccos(1/3) \approx 71^\circ$ , смысл угла  $\alpha_3 \approx 51^\circ$  ясен из графика на рисунке 3).

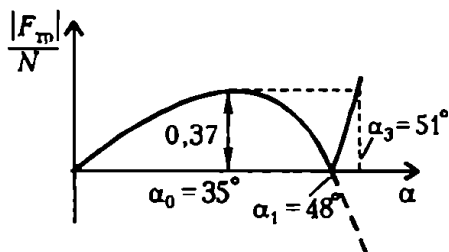


Рис. 3

Как видим, обсуждение конкретной задачи превратилось в маленькое исследование, а точное решение оказалось «богаче» поставленного вопроса: вскрылись такие черты явления, о которых мы заранее не догадывались. Что же именно мы узнали?

Во-первых, мы подтвердили начальное качественное предположение: при достаточно большом коэффициенте трения ( $\mu > 0,37$ ) палочка будет проскальзывать в сторону падения (рис.4). Во-вторых, мы выяснили, что при любом сколь угодно большом  $\mu$  проскальзывание начнется при угле отклонения меньше  $71^\circ$ . В-третьих, оказалось, что проскальзывание никогда не может начаться в интервале углов от  $35^\circ$  до  $51^\circ$ .

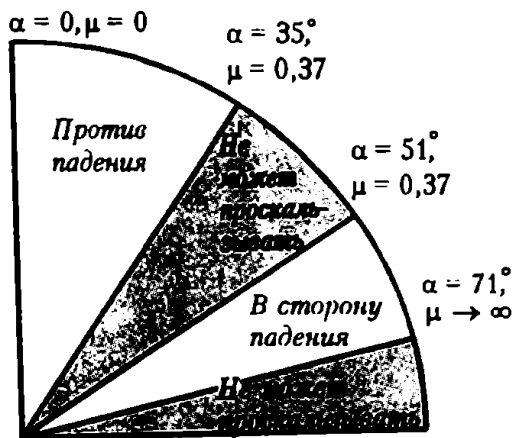


Рис. 4

# ПАЛОЧКА ПРОДОЛЖАЕТ ПАДАТЬ...

А. Черноуцан

В предыдущей статье рассматривалась задача о тонкой палочке, падающей из вертикального положения на горизонтальную плоскость. А именно, обсуждался вопрос, куда проскользнет нижний конец палочки: в сторону падения или в противоположную сторону?

Эта задача заинтересовала меня довольно давно, более десяти лет назад, когда я решал со своими студентами олимпиадные задачи. Задача выглядела новой и интересной, при этом интуитивно чувствовалось, что ответ должен зависеть от коэффициента трения. Действительно, при очень слабом трении проскальзывание начинается почти сразу, причем в сторону, противоположную падению (как на гладкой плоскости). При сильном трении палочка к моменту проскальзывания успевает приобрести горизонтальный импульс и может «потащить» нижний конец в сторону падения.

К радости моей и студентов выяснилось, что задача эта решается точно, а полученное решение полностью подтвердило все предположения. «Критический» коэффициент трения, при котором меняется направление проскальзывания, оказался равным  $\mu = 15\sqrt{10}/128 \approx 0,37$ . Обнаружились и другие, достаточно неожиданные, свойства падающей палочки. Например, что при любом сколь угодно большом коэффициенте трения палочка начнет обязательно проскальзывать, причем при угле отклонения от вертикали меньше  $\arccos(1/3) \approx 71^\circ$ . Обо всем этом и рассказывалось в предыдущей статье.

Однако возникли новые обстоятельства, которые заставили меня взяться за вторую статью о падающей палочке.

Во-первых, пришел из США очередной номер журнала-побратима «Кванта» – американского «Квантума» (март/апрель 1998 г.). Большая часть журнала состояла, как обычно, из переведенных на английский язык статей из «Кванта», но были

---

Опубликовано в «Кванте» №2 за 1999 год.

там и новые статьи. Среди них – статья, написанная американским физиком-теоретиком Лифом Тернером и его ученицей Джейн Пратт и посвященная... падающей палочке! (Недаром говорят, что физика не знает границ.) Оказывается, некоторое время назад они придумали задачу о палочке, решили ее и сразу же написали об этом в «Квантум». Правда, во главу угла авторы поставили вопрос не о направлении проскальзывания (на этот вопрос они тоже ответили), а о возможности отрыва от пола нижнего конца палочки, и очень красивым способом доказали, что конец палочки будет скользить без отрыва до самого ее падения. Мне так понравились их рассуждения, что захотелось рассказать (с некоторыми упрощениями) об этом нашим читателям. Тем более, что сам я даже не брался за рассмотрение движения после начала скольжения, так как считал его очень сложным (в частности, потому, что механическая энергия больше не сохраняется).

Во-вторых, просматривая мой любимый «Задачник Буховцева» («Сборник задач по элементарной физике», авторы Б.Б. Буховцев, В.Д. Кривченков, Г.Я. Мякишев, И.М. Сараева; М.: Наука, 1987), я натолкнулся на давно забытую задачу:

**196.** На конце легкого стержня, поставленного вертикально на пол, закреплен массивный шар. Стержень начинает падать без начальной скорости. При каком значении угла между стержнем и вертикалью конец стержня перестанет давить на пол? При каком значении коэффициента трения стержень не проскользнет до этого момента?

Решение этой задачи опирается на интуитивное предположение, что полная сила реакции пола  $\vec{R}$  направлена вдоль стержня (рис.1). Правда, это утверждение является точным только в том случае, если на конце стержня закреплен не шар конечного радиуса, а материальная точка, но для маленького шара эта неточность кажется несущественной. Движение шара описывается уравнениями

$$mg \cos \alpha - R = \frac{mv^2}{l},$$

$$\frac{mv^2}{2} = mgl(1 - \cos \alpha),$$

где  $m$  – масса шара,  $v$  – его линейная скорость,  $l$  – длина стержня. Если положить  $R = 0$ , то получим  $\cos \alpha_1 = 2/3$ . Чтобы стержень до этого момента не начал проскальзывать, при  $\alpha < \alpha_1$  дол-

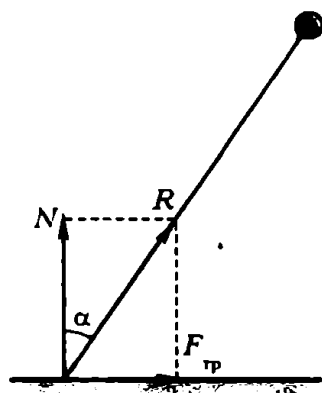


Рис.1

жно выполняться неравенство  $F_{\text{тр}} < \mu N$ . Иными словами, проскальзывания не будет, если  $\mu > \text{tg}(\arccos(2/3)) = \sqrt{5}/2$ .

Получается, что судьба падающего стержня существенно зависит от распределения массы вдоль его длины. Однородная палочка обязательно начнет проскальзывать, но никогда не оторвется от пола, а невесомый стержень с точечной массой на конце от пола отрывается. Чтобы разобраться подробнее, запишем уравнения динамики для тонкого падающего стержня с произвольным распределением массы вдоль его длины и изучим вопрос о начале проскальзывания. Следующим пунктом нашей программы будет изучение падения такой «обобщенной» палочки после начала скольжения (следуя идеям Лифа и Джейн).

С точки зрения динамики, свойства такого линейного объекта полностью определяются его массой  $m$ , расстоянием  $d$  от нижнего конца до центра масс и моментом инерции  $I_0$  относительно центра масс. Однако можно вместо этих параметров ввести один

безразмерный параметр  $\gamma = \frac{I_0}{md^2}$ , который будет полностью определять свойства нашего стержня. Момент инерции стержня относительно точки касания равен  $I = I_0 + md^2 = (\gamma + 1)md^2$ . Для точечной массы на конце стержня  $\gamma = 0$ , а для однородного стержня  $\gamma = 1/3$ .

А в каких пределах может изменяться параметр  $\gamma$ ? Рассмотрим невесомый стержень с точечными массами на его концах. Меняя величины масс  $m_1$ ,  $m_2$  и длину стержня  $l$ , можно получить все возможные значения параметров  $m$ ,  $d$ ,  $I_0$  и  $\gamma$  (для данного случая  $\gamma = m_1/m_2$ , проверьте это самостоятельно). Например, гантелька с массой  $m/4$  внизу и  $3m/4$  наверху будет полностью

эквивалентна однородной палочке. Видно, что параметр  $\gamma$  может принимать любые положительные значения.

Итак, запишем закон динамики вращательного движения «обобщенного» стержня относительно нижней точки (рис.2):

$$mgd \sin \alpha = (I_0 + md^2)\epsilon,$$

или

$$g \sin \alpha = (\gamma + 1)\epsilon d,$$

и закон сохранения энергии:

$$mgd(1 - \cos \alpha) = (I_0 + md^2)\frac{\omega^2}{2},$$

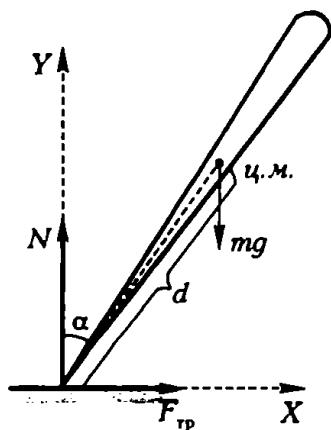


Рис. 2

или

$$g(1 - \cos \alpha) = (\gamma + 1) \frac{\omega^2 d}{2},$$

где  $\epsilon = d\omega/dt$  – угловое ускорение. Выразим проекции ускорения центра масс  $a_x$  и  $a_y$  на горизонтальную и вертикальную оси через линейное ускорение  $\epsilon d$  и центростремительное ускорение  $\omega^2 d$ :

$$\begin{aligned} a_x &= d(\epsilon \cos \alpha - \omega^2 \sin \alpha), \\ a_y &= -d(\epsilon \sin \alpha + \omega^2 \cos \alpha). \end{aligned} \quad (1)$$

Теперь с помощью законов Ньютона

$$F_{\text{тр}} = ma_x, \quad (2) \quad a)$$

$$N - mg = ma_y$$

найдем зависимости  $F_{\text{тр}}$  и  $N$  от угла  $\alpha$ :

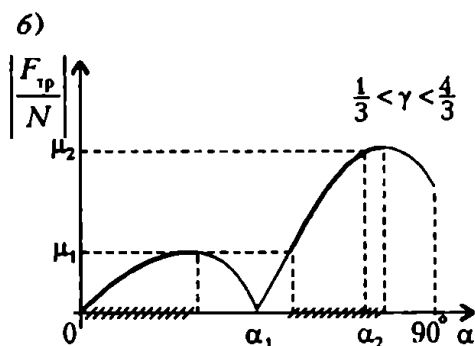
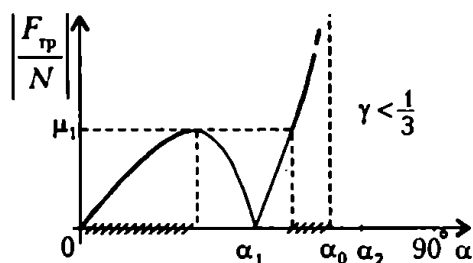
$$F_{\text{тр}} = \frac{3mg}{\gamma + 1} \sin \alpha \cdot \left( \cos \alpha - \frac{2}{3} \right),$$

$$N = \frac{3mg}{\gamma + 1} \left( \cos^2 \alpha - \frac{2}{3} \cos \alpha + \frac{\gamma}{3} \right). \quad б)$$

Чтобы выяснить условия начала проскальзывания, надо исследовать поведение функции

$$\mu = \left| \frac{F_{\text{тр}}}{N} \right| = \left| \frac{\sin \alpha \cdot \left( \cos \alpha - \frac{2}{3} \right)}{\cos^2 \alpha - \frac{2}{3} \cos \alpha + \frac{\gamma}{3}} \right|.$$

Качественно поведение этой функции представлено графически на рисунке 3. (Для нахождения экстремумов функции надо приравнять к нулю производную этой функции. Убедитесь сами, что получается квадратное уравнение относительно  $\cos \alpha$ .) Интер-



а)

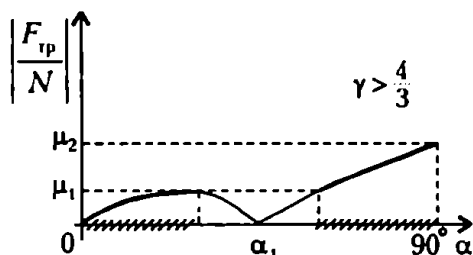


Рис. 3

валы функции, соответствующие проскальзыванию, выделены более жирными линиями, а интервалы углов – штриховкой на оси абсцисс. Левая область соответствует проскальзыванию против направления падения ( $\mu < \mu_1$ ), а правая – проскальзыванию в сторону падения ( $\mu > \mu_1$ ).

При  $0 < \gamma < 1/3$  (см. рис.3,а) проскальзывание начнется при любом сколь угодно большом значении коэффициента трения  $\mu$ , причем при угле меньше некоторого  $\alpha_0$ . (При  $\gamma \rightarrow 0$  угол  $\alpha_0 \rightarrow \alpha_1 = \arccos(2/3) \approx 48^\circ$ , а при  $\gamma = 1/3$  угол  $\alpha_0 = \alpha_2 = \arccos(1/3) \approx 71^\circ$ .) Поведение стержня получается качественно таким же, как и падающей палочки. При  $\gamma > 1/3$  функция остается конечной при всех  $\alpha$  (рис.3,б,в). Значит, при достаточно большом коэффициенте трения ( $\mu > \mu_2$ ) проскальзывания не будет вовсе.

Отметим, что при  $\gamma \rightarrow 0$ , что соответствует переходу к задаче, рассмотренной в «Задачнике Буховцева», проскальзывание начнется при любом  $\mu$ , причем для  $\mu > \sqrt{5}/2$  проскальзывание будет происходить в сторону падения и начнется при угле чуть больше  $\arccos(2/3)$ . Впрочем, значения сил  $F_{тр}$  и  $N$  в момент начала проскальзывания будут очень малыми.

Что же будет происходить после начала скольжения? Как убедиться в том, что нижний конец стержня будет скользить, не отрываясь от пола? Смещение нижнего конца стержня не повлияет на второе из уравнений (1), и после подстановки  $a$ , во второе из уравнений (2) получим

$$N - m(g - \omega^2 d \cos \alpha) = -md\epsilon \sin \alpha. \quad (3)$$

Запишем теперь закон динамики вращательного движения относительно центра масс стержня:

$$Nd \sin \alpha - F_{тр} d \cos \alpha = I_0 \epsilon,$$

или

$$N \sin \alpha - F_{тр} \cos \alpha = \gamma m d \epsilon.$$

Учитывая, что  $F_{тр} = \pm \mu N$  (верхний знак соответствует скольжению против направления падения), получим

$$N(\sin \alpha \mp \mu \cos \alpha) = \gamma m d \epsilon. \quad (4)$$

Отметим, что выражение в скобках в момент начала проскальзывания положительно и, значит, не может обратиться в ноль и изменить знак при увеличении  $\alpha$ .

Из уравнений (3) и (4) выразим  $N$ :

$$N = \frac{m\gamma(g - \omega^2 d \cos \alpha)}{\gamma + \sin \alpha \cdot (\sin \alpha \mp \mu \cos \alpha)}.$$

Видно, что для того чтобы  $N$  обратилась в ноль (произошел отрыв), должно обратиться в ноль выражение  $W(\alpha) = g - \omega^2 d \cos \alpha$ . Так как в начале проскальзывания это выражение положительно, при обращении в ноль оно должно убывать, т.е.  $dW/d\alpha < 0$ . Однако

$$\frac{dW}{d\alpha} = -\frac{d(\omega^2)}{d\alpha} d \cos \alpha + \omega^2 d \sin \alpha.$$

Поскольку  $d(\omega^2)/d\alpha = 2\omega(d\omega/d\alpha) = 2(d\alpha/dt)(d\omega/d\alpha) = 2(d\omega/dt) = 2\epsilon$ , а из выражения (4) следует, что  $\epsilon$  обращается в ноль одновременно с  $N$ , то в момент отрыва  $dW/d\alpha = \omega^2 d \sin \alpha > 0$ . Из полученного противоречия следует, что  $N$  не может обратиться в ноль, т.е. отрыв невозможен!

Получается, что тонкий стержень с произвольным распределением массы вдоль его длины не может оторваться от пола ни при каких условиях. Если, например, рассмотреть маленький шарик на конце невесомого стержня ( $\gamma \rightarrow 0$ ), то после начала скольжения нижний конец стержня будет скользить вдоль пола вплоть до падения шарика на пол, но взаимодействие с полом будет маленьким (по сравнению с  $mg$ ), и движение шарика можно считать почти свободным.



# ВИХРИ НАД ВЗЛЕТНОЙ ПОЛОСОЙ

А. Стасенко

*Ах, как хочется в небо, разбежавшись, ворваться,  
Услышав команду: «Внимание, взлет!».*

Из старой физтеховской песни

Однако разбежаться и врываться следует осторожно, особенно если перед вами взлетел тяжелый самолет. Может быть, вам приходилось видеть, как при резком взлете или посадке голубя на пыльной площадке в окружающем воздухе возникают видимые (за счет пыли) вихревые движения? Если нет — понаблюдайте. Точно так же и тяжелый самолет, отбрасывая вниз мощные потоки воздуха, порождает над аэродромом вихри — и горе легкому летательному аппарату, следующему за ним. Крылья легкого самолета могут попасть в вертикальные потоки воздуха с противоположно направленными скоростями, которые просто опрокинут его «на спину», а близость земли не позволит вновь выровняться. Увы, такие случаи были, так что вихри над взлетной полосой представляют интерес и для пилотов, и для авиадиспетчеров, и, конечно, для ученых-аэрогазодинамиков.

Попробуем и мы исследовать кинематику вихрей — конечно, в самой упрощенной форме.

Что такое вихрь? Его можно увидеть, например, при сливе воды через отверстие ванны или кухонной раковины. Если в воде содержится несколько чайнок, легко заметить, что линейная (окружная) скорость вихря тем больше, чем он ближе к оси вращения. В гидродинамике есть важное понятие потенциального вихря, в котором линейная скорость обратно пропорциональна расстоянию от оси:  $V \sim 1/r$  (рис.1). Эту же идею физики выражают еще так: произведение линейной скорости на длину окружности есть величина постоянная, называемая циркуляцией, т.е.

$$V \cdot 2\pi r = \Gamma. \quad (1)$$

(Кстати, таким же свойством обладает еще и магнитное поле.)

---

Опубликовано в «Кванте» №6 за 1996 год.

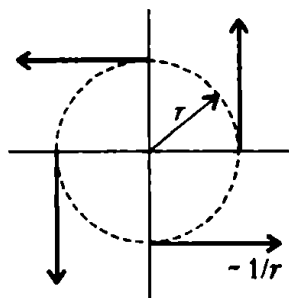


Рис. 1

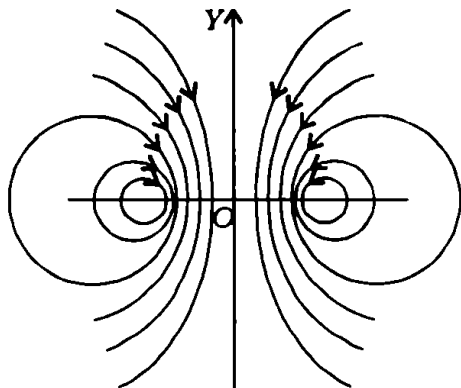


Рис. 2

Легко понять, что за самолетом обычно тянутся два вихря с противоположными направлениями вращения. Действительно, чтобы держаться в воздухе, крыло самолета должно отбрасывать вниз воздух, частицы которого затем расходятся в стороны и возвращаются сверху. В результате перемещения самолета вперед эти частицы описывают спиралевидные траектории. Эти два вихря можно считать зеркальными изображениями друг друга относительно вертикальной плоскости симметрии самолета — ее проекция на плоскость рисунка есть ось  $OY$  (рис. 2). Линии тока воздуха, порожденные правым и левым вихрями, скользят вдоль  $OY$  вниз. Таким образом, эта вертикальная плоскость симметрии является как бы непроницаемой перегородкой для вихрей.

Пусть теперь самолет летит над аэродромом на небольшой высоте  $H$ . Земля-то уж точно непроницаема для движения воздуха, поэтому линии тока, порожденные двумя реальными вихрями, тоже будут скользить параллельно плоскости земли (рис. 3). Картина линий тока будет выглядеть так, как будто «под землей» есть еще пара вихрей, являющихся зеркальными

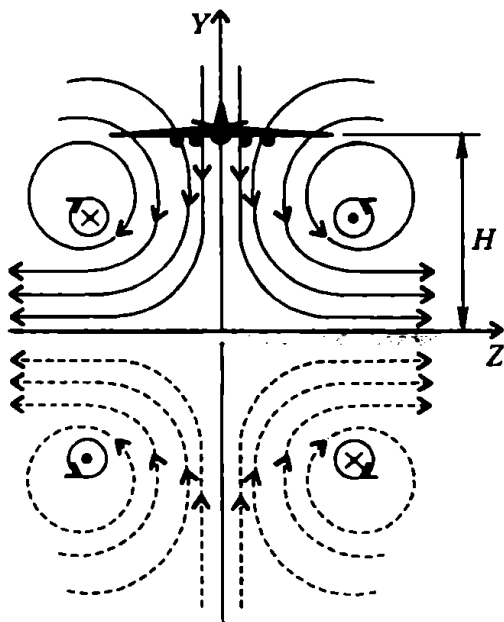


Рис. 3

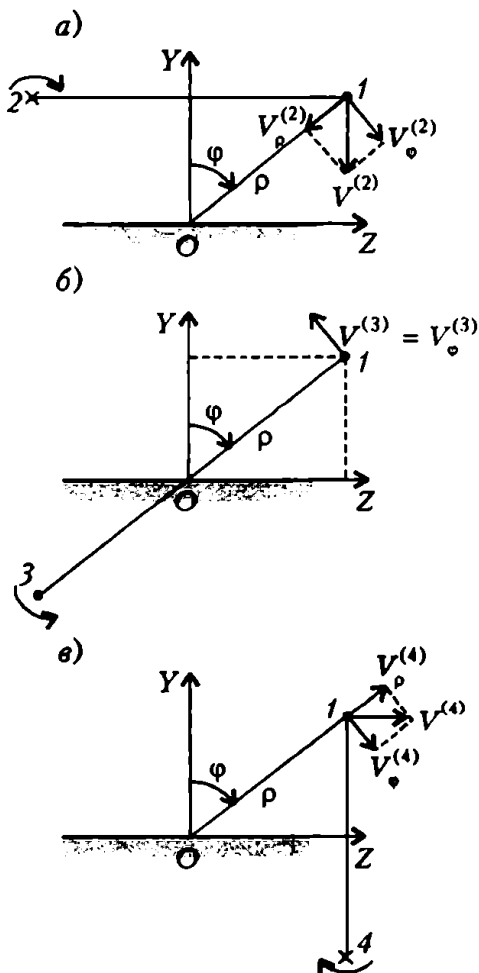


Рис. 4

угол  $\varphi$  (азимут) радиуса-вектора  $\vec{\rho}$ , например относительно оси  $OY$ . В последнем случае вектор скорости  $\vec{V}$  будет иметь радиальную проекцию  $V_p$  и перпендикулярную вектору  $\vec{\rho}$  (азимутальную) проекцию  $V_\phi$ . Сначала рассмотрим скорости, порожденные каждым из трех вихрей в том месте, где проходит ось первого вихря. Согласно формуле (1), левый реальный вихрь (его номер 2) создает в точке 1 скорость, направленную вертикально вниз и равную

$$V^{(2)} = \frac{\Gamma}{2\pi \cdot 2z} = \frac{\Gamma}{2\pi \cdot 2\rho \sin \varphi}$$

(здесь учтено, что  $z = \rho \sin \varphi$ ). Из прямоугольных треугольников

отражениями двух реальных вихрей самолета относительно горизонтальной плоскости. (Из любви к аналогиям, свойственной физикам, напомним, что эта картина линий тока полностью совпадает с картиной линий магнитного поля, порожденной четырьмя параллельными друг другу проводниками, в которых текут одинаковые по модулю электрические токи. Их направление показано условно на рисунке 3 точкой (если ток течет к нам) или крестиком (если от нас).)

Таким образом, можно считать, что каждый из четырех вихрей находится в суммарном поле трех других. Изучим движение одного из них, например вихря 1 (рис. 4). Положение его оси можно описать либо в обычной декартовой системе координат  $YZ$ , либо в так называемой полярной системе, в которой задается расстояние  $\rho$  исследуемой точки от полюса  $O$  и

на рисунке 4,а можно получить искомые проекции:

$$V_{\rho}^{(2)} = -V^{(2)} \cos \varphi = -\frac{\Gamma \cos \varphi}{2\pi \cdot 2\rho \sin \varphi}, \quad V_{\varphi}^{(2)} = V^{(2)} \sin \varphi = \frac{\Gamma}{2\pi \cdot 2\rho}.$$

Здесь знак «минус» указывает на то, что радиальная проекция вектора  $\vec{V}^{(2)}$  направлена против радиуса-вектора. Скорость  $V^{(3)}$ , порожденная левым мнимым вихрем (номер 3, см. рис.4,б), имеет только азимутальную составляющую

$$V_{\varphi}^{(3)} = \frac{\Gamma}{2\pi \cdot 2\rho}.$$

Наконец, скорость, порожденная правым мнимым вихрем (номер 4), имеет составляющие (см. рис.4,в)

$$V_{\rho}^{(4)} = \frac{\Gamma \sin \varphi}{2\pi \cdot 2\rho \cos \varphi}, \quad V_{\varphi}^{(4)} = \frac{\Gamma}{2\pi \cdot 2\rho}.$$

Учтем теперь, что радиальная составляющая скорости вихря 1 равна быстрой изменению радиуса  $\rho$  по времени:

$$V_{\rho} = \frac{\Delta \rho}{\Delta t},$$

а азимутальная — быстрой изменению дуги  $\rho \Delta \varphi$  со временем:

$$V_{\varphi} = \rho \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}.$$

Приравняем эти выражения, соответственно, сумме радиальных и азимутальных составляющих скоростей от всех трех вихрей:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \rho}{\Delta t} &= \frac{\Gamma}{2\pi \cdot 2\rho} \left( -\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \right), \\ \rho \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} &= \frac{\Gamma}{2\pi \cdot 2\rho}. \end{aligned} \quad (2)$$

Таким образом, мы выписали кинематическую систему уравнений — математическую связь между пространственными и временной переменными.

Попробуем найти решение этой системы уравнений (ибо нет ничего недоступного для читателей «Кванта»). Например, если мы разделим почленно уравнения друг на друга, мы исключим время, и тогда останется связь только между радиальной координатой оси вихря и ее азимутом:

$$\frac{\Delta \rho}{\rho \Delta \varphi} = \frac{\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi}{\sin \varphi \cos \varphi} = -\frac{\cos 2\varphi}{\frac{1}{2} \sin 2\varphi}$$

(мы привели правую часть к общему знаменателю и использовали тригонометрические соотношения для синуса и косинуса двойного угла). Умножив обе части полученного равенства на  $\Delta\varphi$ , мы, как говорят математики, разделим переменные: слева все будет зависеть только от  $\rho$ , справа — только от  $\varphi$ :

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = -\frac{\cos 2\varphi \cdot \Delta(2\varphi)}{\sin 2\varphi} = -\frac{\Delta(\sin 2\varphi)}{\sin 2\varphi}$$

(тут мы учли, что производная от синуса есть косинус). Ну а теперь простое интегрирование дает (соответствующий интеграл можно найти в таблицах)

$$\ln \frac{\rho}{\rho_*} = \ln \frac{\sin 2\varphi_*}{\sin 2\varphi}, \text{ или } \frac{\rho}{\rho_*} = \frac{\sin 2\varphi_*}{\sin 2\varphi},$$

где  $\rho_*$  — значение радиуса при некотором конкретном угле  $\varphi_*$ . Видно, что радиус достигает минимального значения  $\rho_m$  при  $\sin 2\varphi_* = 1$ , т.е. при  $\varphi_* = \pi/4$ . Поэтому запишем

$$\frac{\rho}{\rho_m} = \frac{1}{\sin 2\varphi}. \quad (3)$$

Теперь мы знаем, как выглядит проекция оси вихря на вертикальную плоскость. Так, ось симметрична относительно биссектрисы прямого угла  $YOZ$ . Далее, при  $\varphi \rightarrow 0$  и  $\varphi \rightarrow \pi/2$  модуль радиуса-вектора  $\rho$  стремится к бесконечности. Например, рассмотрим случай  $\varphi \rightarrow 0$ ,  $\rho \rightarrow \infty$  (самолет летит высоко над землей). Тогда из второго уравнения системы (2) следует, что азимутальная скорость стремится к нулю, а из первого уравнения видно, что имеется только вертикальная скорость  $v_{y\infty}$ , с которой оба реальных вихря опускаются за самолетом:

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta t} = -\frac{\Gamma \cos 2\varphi}{2\pi \cdot 2\rho \sin \varphi \cos \varphi}, \text{ или } -\frac{\Gamma}{2\pi l} = v_{y\infty}$$

(так как  $\rho \sin \varphi = l$ , где  $l$  — расстояние между двумя вихрями).

Подставив равенство (3) во второе уравнение системы (2), получим

$$\frac{\Delta(2\varphi)}{\sin^2 2\varphi} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\Delta t}{\rho_m^2}.$$

Мы записали уравнение с разделенными переменными — слева азимут оси вихря, справа — время. Интегрируя (опять же, например, при помощи таблицы интегралов), получим

$$\frac{\Gamma}{2\pi\rho_m^2} t = \frac{1}{\operatorname{tg} 2\varphi_0} - \frac{1}{\operatorname{tg} 2\varphi}, \quad (4)$$

где угол  $\varphi_0$  соответствует начальному моменту времени  $t = 0$  (в который уже образовались вихри за самолетом). Как легко видеть из рисунка 4,а,  $\operatorname{tg} \varphi_0 = l/(2H)$ , где  $H$  — высота полета. Таким образом, соотношения (3) и (4) полностью определяют положение осей вихрей в зависимости от времени.

Например, при  $t \rightarrow \infty$  имеем  $\operatorname{tg} 2\varphi \rightarrow 0$ , значит,  $\varphi \rightarrow \pi/2$  и  $\rho \rightarrow \infty$ . Следовательно, оси вихрей расходятся в стороны и «стелются» параллельно земле. При этом  $\Delta\rho/\Delta t$  превращается в горизонтальную скорость движения оси вихря:

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta t} \rightarrow \frac{\Gamma}{2\pi\rho_m} = v_{\infty} \text{ при } \varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

Оценим эту скорость. Согласно теореме, сформулированной Николаем Егоровичем Жуковским, подъемная сила — при горизонтальном полете, естественно, равная весу самолета  $P$  — определяется простым соотношением  $P = \Gamma D_a u l$ , где  $D_a$  — плотность атмосферы,  $u$  — скорость полета. Возьмем в качестве примера случай полета на высоте, равной половине расстояния между вихрями:  $H = l/2$ . Тогда  $\varphi_0 = \pi/4$ ,  $\rho_0 = \rho_m = \sqrt{H^2 + H^2} = H\sqrt{2} = l/\sqrt{2}$ , откуда

$$v_{\infty} = \frac{P\sqrt{2}}{2\pi D_a u l^2}.$$

Примем для оценок следующие значения параметров тяжелого взлетающего самолета:  $m = 300$  т,  $P = mg = 3 \cdot 10^6$  Н,  $l = 50$  м,  $u = 100$  м/с,  $D_a = 1$  кг/м<sup>3</sup>. Получим, что вихри перемещаются вправо и влево со скоростью

$$v_{\infty} \approx 2,6 \text{ м/с}.$$

Все наши рассуждения приведены для спокойной атмосферы. А теперь представим, что справа дует поперечный ветер с такой же по величине скоростью. Тогда правый вихрь тяжелого самолета остановится над взлетной полосой и будет долго мешать взлету следующих, пока, наконец, не «растворится» в воздухе.

# СВЕРХЗВУК НА КОНЧИКЕ БИЧА

Г.Меледин

*Чуть помедленнее, кони, чуть помедленнее!  
Не указчики вам кнут и плеть...*

В.С.Высоцкий

В наши стремительно бегущие дни ассоциации, связанные со словами «бич», «кнут», «плеть», не из приятных. Хотя можно вообразить и идиллическую картину: сонный, расплавленный жарой воздух, нависший над зеленью луга, вдруг разрывает резкий щелчок кнута, и стадо лениво поднимается, подчиняясь пастуху. Но нас будет интересовать лишь то, каким образом сравнительно небольшими усилиями можно добиться очень высоких скоростей, пусть на небольшом участке кнута, приводящих к характерному звуку.

Итак, о кнутах, видимо, слышали все, но лишь немногие держали его в руках, пробовали в действии и представляют реально, что при этом происходит.

Обычно кнут представляет собой короткую палку-кнотовище, к концу которой прикреплен сплетенный из кожи или жгута длинный (несколько метров), прочный, с уменьшающимся к свободному концу сечением собственно кнут. Взмахом сообщают кнуту скорость, а потом резким движением кнотовища вызывают движение прикрепленной к нему части кнута в противоположную сторону. Через некоторое время раздается сильный щелчок (если кнут непрочный, то в этот момент часть его может оторваться). Оказывается, щелчок возникает, когда величина скорости у конца кнута переходит через значение скорости звука (как при переходе звукового барьера сверхзвуковым самолетом). Это получается вследствие того, что начальная кинетическая энергия концентрируется на все уменьшающемся движущемся отрезке кнута, а кнотовище и остальная часть кнута, прикрепленная к нему, при этом неподвижны. Быстро растет плотность кинетической энергии, и, соответственно, нарастает скорость.

---

Опубликовано в «Кванте» №4 за 1999 год.

Все это можно рассчитать, что мы и сделаем, разобрав предварительно две задачи, в чем-то перекликающиеся с задачей о кнуте.

### Задача о «сифоне-цепочке».

Предположим, что через гвоздь перекинули тонкую длинную цепочку с малыми неупругими звеньями так, что часть цепочки лежит на краю стола высотой  $h$ , а часть – на полу (рис.1). С какой установившейся скоростью будет двигаться цепочка после того, как ее отпустят?

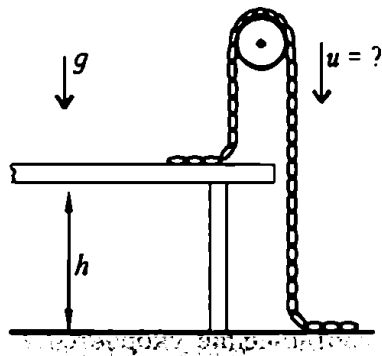


Рис. 1

Введем линейную плотность цепочки  $\rho = M/L$ , где  $M$  – ее масса, а  $L$  – длина. Пусть установилась скорость  $u$ . Тогда за малое время  $\Delta t$  в движение вовлекается масса  $\Delta m = \rho u \Delta t$ , скорость которой изменяется от 0 до  $u$ , а импульс – от 0 до  $\Delta p = \Delta m u = \rho u^2 \Delta t$ . Этот импульс сообщает массе  $\Delta m$  сила тяжести  $\rho h g$ , действующая на неуровновешенную часть цепочки. Исходя из второго закона Ньютона,

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta(mu)}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} u + m \frac{\Delta u}{\Delta t}.$$

Так как рассматривается движение с установившейся скоростью, имеем

$$F = \frac{\Delta m}{\Delta t} u = \frac{\rho u^2 \Delta t}{\Delta t} = \rho u^2 = \rho g h.$$

Отсюда получаем

$$u = \sqrt{gh}.$$

Заметим, что закон сохранения энергии  $\Delta m g h = \Delta m u^2 / 2$  дает неправильный результат, так как часть приобретаемой при спуске энергии (ровно половина) теряется при неупругом ударе цепочки о пол.

Отметим также, что, если убрать гвоздь, т.е. рассматривать задачу о соскальзывании цепочки с края стола на пол, для нахождения установившейся скорости ни в решении, ни в ответе ничего не изменится.

**Задача о нити в трубке.** Представим себе, что внутри U-образной трубки массой  $M$ , находящейся на гладком столе, движется нерастяжимая нить массой  $m$  (рис.2; вид сверху). В начальный момент в каждом колене трубки находилось по половине нити, а сама трубка двигалась. При этом скорость



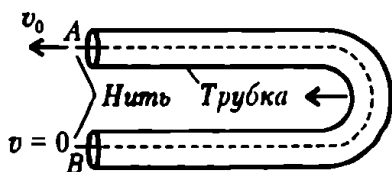


Рис. 2

конца  $A$  нити была равна  $v_0$ , а скорость конца  $B$  — нулю. С какой скоростью будет двигаться трубка, когда нить вылетит из нее? Движение трубки допускается только вдоль ее прямолинейных участков, радиус трубки считать очень малым. Трением пренебречь.

Так как нить нерастяжима, заданное в начальный момент соотношение скоростей для концов нити возможно лишь при условии, что скорость  $u_0$  трубки относительно стола в этот момент равна  $v_0/2$  и направлена в ту же сторону, что и скорость конца нити  $A$ .

Перейдем в систему отсчета, где начальная скорость трубки равна нулю. В этой системе половина нити с концом  $A$  имеет скорость  $v_0/2$ , импульс  $(m/2)(v_0/2)$  и кинетическую энергию  $(m/2)(v_0/2)^2/2$ . А половина нити с концом  $B$  имеет скорость  $-v_0/2$ , импульс  $-(m/2)(v_0/2)$  и кинетическую энергию  $(m/2)(v_0/2)^2/2$ . Таким образом, вначале в этой системе отсчета полный импульс нити, а также импульс и кинетическая энергия трубки равны нулю. Энергия нити при этом равна  $mv_0^2/8$ . Пусть после вылета нити из трубки скорость нити равна  $v$ , а скорость трубки равна  $u$ . Тогда законы сохранения импульса и энергии можно записать следующим образом:

$$0 = Mu + mv, \quad \frac{mv_0^2}{8} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2}.$$

Отсюда

$$u = -\frac{m}{\sqrt{M(m+M)}} \frac{v_0}{2}.$$

Знак «минус» выбран в соответствии с законом сохранения импульса, из которого следует, что скорости  $\vec{u}$  и  $\vec{v}$  направлены в противоположные стороны.

Возвращаясь в систему отсчета, связанную со столом, найдем искомую скорость трубки:

$$u_1 = u + \frac{v_0}{2} = \frac{v_0}{2} \left( 1 - \frac{m}{\sqrt{M(m+M)}} \right).$$

**Задача о кнуте.** Пусть вначале, двигая кнутаовище со скоростью  $v_0$  влево, такую же скорость сообщают всему кнуту по всей

длине  $L$ , а потом, резко сдвинув кнутовище вправо, удерживают его неподвижно, прикладывая некоторую силу. Тогда длина  $l$  движущейся части кнута будет уменьшаться, а скорость  $v$  — увеличиваться. При каком значении  $l$  скорость  $v$  достигнет величины скорости звука  $v_{\text{зв}}$  (рис.3)?

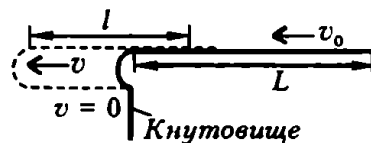


Рис. 3

Сначала для упрощения рассмотрим однородный кнут с массой  $M$  и длиной  $L$ , т.е. с линейной плотностью  $\rho = M/L$ . Из закона сохранения энергии имеем

$$\frac{\rho L v_0^2}{2} = \frac{\rho l v^2}{2},$$

или

$$v = v_0 \sqrt{\frac{L}{l}}.$$

(Между прочим, отсюда видно, что при уменьшении  $l$  до нуля скорость  $v$  неограниченно растет.) Таким образом, получаем связь

$$v = -\frac{dl}{dt} = \frac{v_0 L^{1/2}}{l^{1/2}}.$$

Знак «минус» обусловлен уменьшением длины с течением времени. Запишем связь иначе:

$$l^{1/2} dl = -v_0 L^{1/2} dt$$

и проинтегрируем левую и правую части по интервалу времени  $t$ , за который длина движущейся части кнута меняется от  $L$  до  $l$ :

$$\int_L^l l^{1/2} dl = \frac{l^{3/2}}{3/2} \Big|_{l=L}^{l=l} = \frac{2}{3} (l^{3/2} - L^{3/2}) = -v_0 L^{1/2} t.$$

Отсюда получаем

$$l = L \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{v_0 t}{L} \right)^{2/3},$$

или, с учетом соотношения  $v = v_0 L^{1/2} / l^{1/2}$ ,

$$v = v_0 \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{v_0 t}{L} \right)^{1/3}.$$

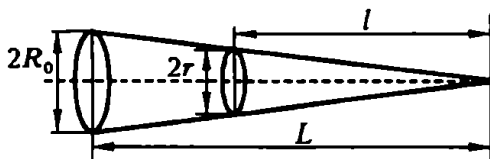


Рис. 4

Формально при  $t = 2L/(3v_0)$  скорость  $v$  стремится к бесконечности, а длина  $l$  – к нулю. Однако это получается при бесконечно тонком од-

нородном кнута, что нереалистично.

Рассмотрим теперь более реальный вариант: кнут с линейно уменьшающимся, от кнутовища к концу, радиусом кругового сечения. Из подобия треугольников на рисунке 4 следует  $r = R_0 l/L$ . Повторяя предыдущую схему рассуждений, запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{m_0 v_0^2}{2} = \rho \frac{\pi R_0^2 L}{3} \frac{v_0^2}{2} = \rho \frac{\pi r^2 l}{3} \frac{v^2}{2},$$

откуда, с учетом связи  $r = R_0 l/L$ , получаем

$$v = v_0 \left( \frac{L}{l} \right)^{3/2}.$$

Тогда

$$l = L \left( 1 - \frac{5}{2} \frac{v_0 t}{L} \right)^{2/5}, \quad v = \frac{v_0}{\left( 1 - \frac{5}{2} \frac{v_0 t}{L} \right)^{3/5}}.$$

Оценим, при какой длине  $l$  скорость  $v$  достигает значения скорости звука  $v_{\text{зв}} \approx 330$  м/с. Положив  $L = 5$  м,  $v_0 = 1$  м/с, получим

$$l = \frac{L}{(v_{\text{зв}}/v_0)^{2/3}} \approx \frac{5 \text{ м}}{(330)^{2/3}} \approx \frac{5 \text{ м}}{50} = 0,1 \text{ м}.$$

Таким образом, при длине порядка 10 см от конца кнута происходит щелчок – переход звукового барьера.

# СЛУЧАЙ В ГАЗОВОЙ ТУМАННОСТИ

А. Стасенко

*Бешено стучали сердца, вращались ротаторы, дрожали осцилляторы; смотроскопы показывали искривление пространства-времени. Сквозь заклепки сочлились кванты. Черная энтропия росла...*

*– Ба, да ведь мы на краю обыкновенной гиперплоскости! – воскликнул Сто Двадцать Пятый штурман.*

Из квазинаучной фантастики

Случилось это как-то давным-давно: два звездолета неожиданно попали в область притяжения холодного водородного облака и истратили весь запас топлива на торможение, так что остановились буквально у его границы. Что было делать? Конечно, «лечь в дрейф», как говорили древние моряки, – ничего не делать и ждать помощи.

Тут астронавты заметили, что корабли затормозили у границы облака в разном положении: один – перпендикулярно границе, а другой – параллельно. (Надобно сказать, что в ту пору звездолеты строили в виде тонких дисков.) Засели штурманы за компьютеры и решили узнать, как будут двигаться их корабли и – самое главное – когда они будут вновь сближаться. Засядем и мы.

Пусть (как вскоре и выяснили астронавты) облако водорода будет плоским и однородным (т.е. постоянной плотности). Поскольку есть скопление массы, должно быть поле тяготения. Ясно, что во всех точках средней плоскости (при  $x = 0$  на рисунке 1, а) сила тяготения равна нулю – из соображений симметрии. При удалении от плоскости симметрии сила тяготения в расчете на единицу массы – т.е. ускорение тяготения – должна расти по модулю, а, как вектор, ускорение тяготения должно быть направлено к плоскости симметрии.

---

Опубликовано в «Кванте» №4 за 2000 год.

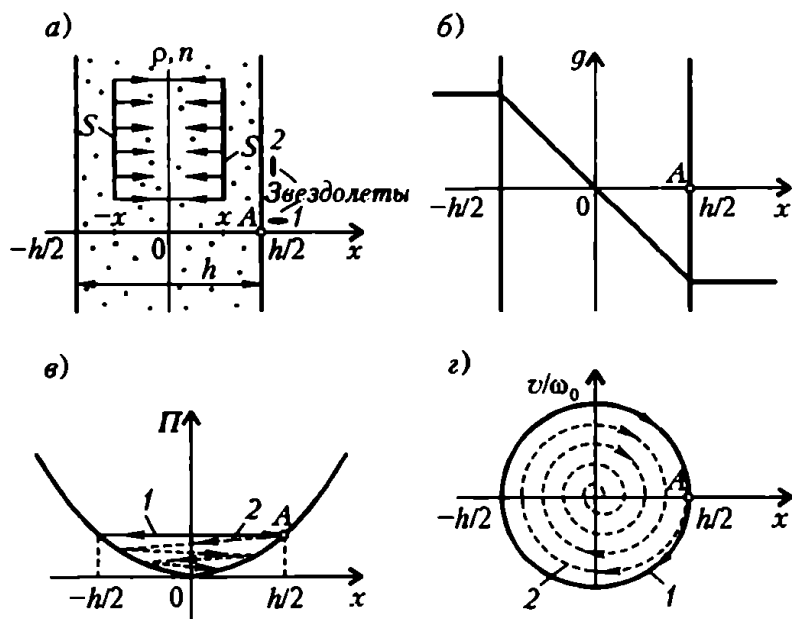


Рис. 1

Великий математик Гаусс догадался, как все эти мысли записать короче. Выделим мысленно внутри слоя коробку с крышками площадью  $S$ , расположенными при  $x$  и  $-x$  параллельно границам (и плоскости симметрии) газового слоя (на рисунке 1, а она показана сбоку). Ускорение тяготения  $g(x)$  постоянно во всех точках этих крышек. Похоже, что оно как бы «втекает» внутрь коробки, поэтому произведение  $2Sg(x)$  называется потоком вектора  $\vec{g}$  внутрь этой коробки. Так вот, теорема Гаусса утверждает, что этот поток пропорционален массе вещества внутри коробки  $\rho \cdot 2Sx$  — только эта масса и порождает этот поток, причем коэффициентом пропорциональности является гравитационная постоянная  $G$ , умноженная на  $4\pi$ . Таким образом,

$$2Sg(x) = -4\pi G\rho \cdot 2Sx, \quad (1)$$

где знак «минус» показывает, что вектор  $\vec{g}$  направлен именно внутрь коробки.

Кто хочет, может проверить теорему Гаусса на примере точечной гравитирующей массы  $m_1$ . Действительно, окружим точечную массу сферой радиусом  $r$  и, значит, площадью  $4\pi r^2$  (рис. 2). Тогда

$$g(r) \cdot 4\pi r^2 = -4\pi Gm_1,$$

откуда

$$g(r) = -\frac{Gm_1}{r^2}$$

– получили известное выражение для ускорения силы Ньютона для гравитирующей точки. Можно сказать, что всемирный закон тяготения «спрятан» в теореме Гаусса.

Итак, из равенства (1) находим

$$g(x) = -4\pi G\rho x.$$

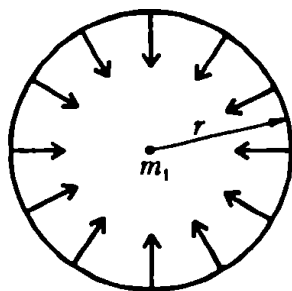


Рис. 2

Но если сила пропорциональна смещению  $x$  (см. рис.1,б), то потенциальная энергия пропорциональна  $x^2/2$  (см. рис.1,в). Вспомним, например, пружину жесткостью  $k$ : возвращающая сила равна  $F = -kx$ , потенциальная энергия равна  $\Pi = kx^2/2$ . В нашем случае, очевидно,  $k = 4\pi MG\rho$ , где  $M$  – масса звездолета. Значит, суммарная механическая энергия звездолета, находящегося на расстоянии  $x$  от плоскости симметрии облака и имеющего здесь скорость  $v$ , равна

$$\frac{Mv^2}{2} + 4\pi MG\rho \frac{x^2}{2}.$$

Первый звездолет-диск, движущийся ребром к границам плоского облака, почти не встречает сопротивления. Поэтому его суммарная механическая энергия постоянна и равна, например, ее значению на краю облака

$$\frac{M \cdot 0^2}{2} + \frac{4\pi MG\rho}{2} \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

(учтено, что скорость при этом нулевая). Тогда закон сохранения энергии звездолета можно записать так:

$$\left(\frac{v}{\sqrt{4\pi G\rho}}\right)^2 + x^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2. \quad (2)$$

Здесь  $\sqrt{4\pi G\rho} = \omega_0$  – это угловая частота гармонических колебаний звездолета внутри параболической потенциальной ямы (рис.3), следовательно, период колебаний будет равен

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \sqrt{\frac{\pi}{G\rho}}. \quad (3)$$

С другой стороны, соотношение (2) можно графически пред-

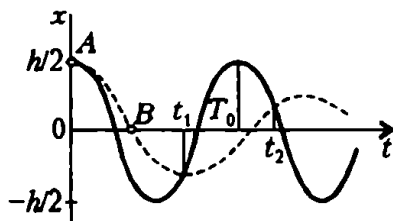


Рис. 3

ставить в координатах  $x, v/\omega_0$  (на так называемой фазовой плоскости) в виде окружности радиусом  $h/2$  (см. рис.1,з): движение начинается из точки A (где  $x_A = h/2$  и  $v_A = 0$ ) и в отсутствие трения происходит вечно, возвращаясь в эту же точку через

время  $T_0$ . А еще можно записать смещение и скорость звездолета  $l$  как функции времени:

$$x = \frac{h}{2} \cos \omega_0 t, \quad v = -\frac{h}{2} \omega_0 \sin \omega_0 t. \quad (4)$$

С такой точки зрения, равенство (2) – это просто теорема Пифагора в координатах  $x, v/\omega_0$ .

Но что происходит со вторым звездолетом, который пересекает облако плазмы? Так как у него большое поперечное сечение  $S_{\perp} = \pi a^2$ , где  $a$  – его радиус, он будет тормозиться за счет столкновений с молекулами. Если считать удары молекул абсолютно упругими, то каждая из них (массой  $m$ ) сообщает звездолету импульс  $-2mv$ , а так как в единицу времени он «заметает» объем пространства  $S_{\perp} v$ , то полный поток импульса (т.е. сила сопротивления) составит  $\pi a^2 \cdot 2\rho v^2$  (здесь учтено, что  $\rho = mn$ , где  $n$  – концентрация молекул в облаке). Значит, при перемещении звездолета на расстояние  $\Delta x$  работа силы сопротивления равна  $\pi a^2 \cdot 2\rho v^2 \Delta x$ . Полная механическая энергия второго звездолета уже не будет постоянной (см. рис.1,в), и ее убыль на перемещении  $\Delta x$  составит

$$\Delta \left( \frac{1}{2} \left( \frac{v}{\omega_0} \right)^2 + \frac{x^2}{2} \right) = -\frac{\pi a^2 \cdot 2\rho}{M} \left( \frac{v}{\omega_0} \right)^2 |\Delta x|. \quad (5)$$

Очевидно, что это будут уже затухающие колебания (см. рис.3). Период их будет больше  $T_0$ , и ясно почему: из-за силы торможения второй звездолет уже впервые дойдет до плоскости симметрии (точка B) позднее, чем первый. А на фазовой плоскости движение второго звездолета изобразится в виде спирали (см. рис.1,з).

Можно написать решение уравнения (5) в виде кривой в фазовой плоскости:

$$\left( \frac{v}{\omega_0} \right)^2 = -2l \left( x - l - \left( \frac{h}{2} - l \right) e^{\frac{h/2-x}{l}} \right), \quad (6)$$

где введено обозначение

$$l = \frac{M}{\pi a^2 \cdot 4\rho}. \quad (7)$$

Величина  $l$  имеет размерность длины и, очевидно, является тем характерным расстоянием, на котором существенно изменяется кинетическая энергия второго звездолета из-за силы сопротивления.

Кто хочет убедиться в правильности этого решения, пусть подставит его в уравнение (5), а кто не может, пусть не расстраивается, а поступает на факультет аэромеханики и летательной техники Московского физико-технического института – тогда и сможет.

Да, но! – воскликнул капитан одного из звездолетов. – Если внутри этого газового слоя есть гравитация, то почему он не сжимается к плоскости симметрии?!

Другой капитан объяснил ему по радио, что сжатию препятствует хаотическое, «тепловое» движение атомов. В самом деле, хотя облако и холодное – температура порядка 20 К, т.е. раз в 15 меньше, чем средняя температура Земли, но и молекулы водорода тоже раз в пятнадцать легче, чем молекулы воздуха, поэтому средняя скорость их теплового движения никак не меньше, чем у молекул земной атмосферы. А ведь атмосфера не падает на поверхность нашей родной планеты! Конечно, плотность атмосферы не постоянна – она убывает с высотой, так что и наличие резкой границы плотности у встретившегося облака есть не более чем предположение, упрощающее расчеты.

Теперь осталось подставить в уравнение (6) кинематическое определение скорости  $v = dx/dt$  и, решая полученное дифференциальное уравнение (например, на компьютере), найти «расписание движения»  $x(t)$  второго звездолета. Но это и не обязательно делать прямо сейчас – пусть этим занимаются штурманы, а мы по сути дела уже все описали качественно. Например, моменты времени новых встреч звездолетов ( $t_1, t_2, \dots$ ) можно будет найти из графиков на рисунке 3.

Сделаем лишь некоторые численные оценки. Примем плотность молекулярного облака  $\rho \sim 10^{-16}$  кг/м<sup>3</sup>, его характерную толщину  $h \sim 0,1$  пк =  $3 \cdot 10^{15}$  м. В качестве данных для звездолетов возьмем, например, следующие: масса  $M \sim 1000$  т =  $10^6$  кг (три современных авиалайнера), радиус диска  $a \sim 100$  м. Тогда, согласно выражению (3), для периода гармонических колебаний



первого звездолета получим

$$T_0 \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{М}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2} \cdot 10^{-16} \frac{\text{кг}}{\text{М}^3}}} \sim 0,3 \cdot 10^{14} \text{ с} \approx 10^6 \text{ лет.}$$

Наибольшая скорость движения, которая достигается в плоскости симметрии облака (при  $x = 0$ ), согласно уравнению (2), равна

$$v_{\max} = \frac{h}{2} \sqrt{4\pi G \rho} \sim 400 \text{ м/с},$$

что сравнимо со средней тепловой скоростью движения молекул. Поэтому к проведенному выше вычислению силы сопротивления нужно тоже относиться лишь как к оценке по порядку величины. Зато уж точно взаимодействие звездолета с облаком является, как говорят физики, свободномолекулярным. Действительно, средняя длина свободного пробега молекул между их столкновениями зависит от концентрации молекул  $n$  и поперечного сечения их взаимодействия  $\pi(2r_n)^2$  так:  $\lambda \sim \frac{1}{n\pi(2r_n)^2}$ . Подстав-

ля сюда  $n = \rho/m_{\text{H}_2} \sim 10^{-16} \text{ кг/М}^3 / (2 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}) \sim 3 \cdot 10^{10} \text{ М}^{-3}$  и  $r_n \sim 3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ , получим  $\lambda \sim 3 \cdot 10^7 \text{ м}$ , что много больше размеров звездолета. Значит, молекулы ударяются о его поверхность независимо друг от друга (не образуя сплошной среды).

Характерное расстояние, на котором заметно убывает энергия второго звездолета (оно входит в показатель экспоненты в равенстве (6)), равно

$$l \sim \frac{10^6 \text{ кг}}{\pi \cdot 10^4 \text{ М}^2 \cdot 4 \cdot 10^{-16} \text{ кг/М}^3} \sim 10^{17} \text{ м}.$$

Это заметно больше принятой толщины газового облака; значит, затухание колебаний в его пределах будет незначительным.

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МАЯТНИК НА НАКЛОННЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

П. Хаджи, А. Михайленко

Предлагаем вам рассмотреть несколько частных случаев из жизни математического маятника с длиной нити  $L$  и массой подвешенного к ней грузика  $m$ .

**Наклонная плоскость.** Пусть математический маятник расположен на абсолютно гладкой поверхности, наклоненной под углом  $\alpha$  к вертикали (рис. 1, а). В положении равновесия на тело маятника действуют три силы: сила тяжести  $m\vec{g}$ , направленная вертикально вниз, натяжение нити  $\vec{N}$ , направленное по нити, и реакция опоры  $\vec{Q}$ , перпендикулярная плоскости. Проектируя все силы вдоль наклонной плоскости и перпендикулярно к ней, получаем

$$N = mg \cos \alpha, \quad Q = mg \sin \alpha.$$

При отклонении нити от равновесного положения на небольшой угол  $\varphi$  маятник начнет двигаться по дуге окружности на наклонной плоскости. При этом нормальная составляющая силы тяжести сохраняет свое значение, а сила натяжения нити меняется по величине. Ответственной за создание возвращающей силы  $F$  является проекция силы тяжести на наклонную плоскость. Из рисунка 1, б, на котором изображены действующие на маятник силы в проекции на наклонную плоскость, видно, что

$$F = mg \cos \alpha \sin \varphi.$$

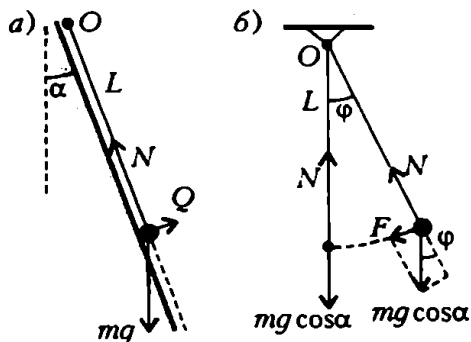


Рис. 1

---

Опубликовано в «Кванте» №2 за 1998 год.

Считая колебания малыми ( $\varphi \ll 1$ ), получаем

$$F = mg \cos \alpha \cdot \varphi = mg \cos \alpha \cdot \frac{x}{L},$$

где  $x$  — длина дуги окружности, вдоль которой движется грузик маятника. Таким образом, возвращающая сила  $F$  пропорциональна смещению  $x$  из положения равновесия и направлена в сторону, противоположную смещению. Сравнивая полученный результат с известными соотношениями для обычного маятника, легко прийти к выводу, что частота колебаний математического маятника на наклонной плоскости выражается формулой

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L} \cos \alpha}.$$

При  $\alpha = 0$  для частоты колебаний получаем известное выражение  $\omega = \sqrt{g/L}$ . С ростом угла наклона плоскости  $\alpha$  частота колебаний монотонно убывает, обращаясь в ноль при  $\alpha = 90^\circ$  (это связано с тем, что проекция силы тяжести на наклонную плоскость убывает с ростом угла  $\alpha$ ).

**Внутренняя поверхность полусферы.** Представим себе, что математический маятник прикреплен в некоторой точке  $A$  с внутренней стороны абсолютно гладкой полусферы радиусом  $R$  (рис. 2). Точка  $A$  расположена на окружности большого круга, ось симметрии полусферы вертикальна. Предполагается, что  $L < \sqrt{2}R$ . Найдем частоту малых колебаний маятника.

Грузик маятника при колебаниях перемещается вдоль дуги окружности, плоскость которой перпендикулярна большому кругу полусферы. Из простых геометрических соображений следует, что радиус этой окружности

$$r = L \sqrt{1 - \frac{L^2}{4R^2}}.$$

Маятник на полусфере эквивалентен обычному математическому маятнику с длиной нити, равной  $r$ . Поэтому частота малых колебаний маятника на полусфере равна

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L \sqrt{1 - L^2/(4R^2)}}}.$$

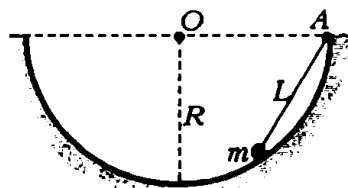


Рис. 2

Отсюда следует, что частота колебаний определяется длиной нити  $L$  и радиусом полусферы  $R$ . При  $L = \sqrt{2}R$  получаем известную формулу для частоты малых колебаний свободного тела внутри полусферы:  $\omega = \sqrt{g/R}$ . При  $L \ll R$  получаем выражение для частоты колебаний традиционного математического маятника. Это обусловлено тем, что участок поверхности полусферы, где происходят колебаний, при  $L \ll R$  вырождается в вертикальную плоскость. С увеличением длины нити частота колебаний монотонно убывает и при  $L = \sqrt{2}R$  достигает приведенного выше минимального значения.

**Внутренняя поверхность прямого кругового конуса.** Рассмотрим математический маятник, который подвешен в некоторой точке  $A$  с внутренней стороны абсолютно гладкого прямого кругового конуса, где радиус окружности в сечении конуса равен  $R$  (рис.3). Ось конуса  $OO'$  расположена вертикально, угол между образующей конуса и осью равен  $\alpha$ . Определим частоту малых колебаний нашего маятника. Для этого используем энергетический подход.

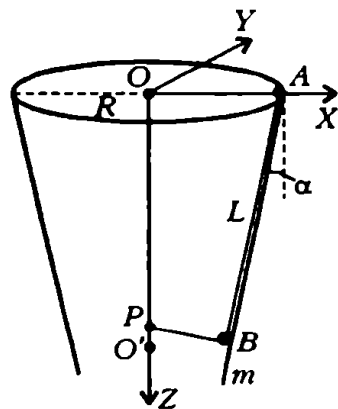


Рис. 3

В положении равновесия нить маятника ориентирована вдоль образующей конуса. Введем прямоугольную систему координат с началом в точке  $O$ , где ось  $X$  направлена вдоль прямой  $OA$ , ось  $Z$  совпадает с осью конуса, а ось  $Y$  перпендикулярна к ним. Координаты точки подвеса маятника в процессе колебаний не меняются и равны

$$x_A = R, y_A = 0, z_A = 0.$$

Координаты точки  $B$ , в которой находится грузик маятника в положении равновесия, равны, соответственно,

$$x_B^0 = R - L \sin \alpha, y_B^0 = 0, z_B^0 = L \cos \alpha.$$

Из этих выражений следует очевидное равенство

$$L^2 = (x_B^0 - x_A)^2 + (y_B^0 - y_A)^2 + (z_B^0 - z_A)^2.$$

Выведем маятник из положения равновесия, отклонив нить на некоторый угол. Будем характеризовать положение грузика маятника углом  $\varphi$ , который образует радиус  $O'B$  при отклоне-

нии нити. Критерием малости колебаний здесь будет, как обычно, неравенство  $\varphi \ll 1$ . При отклонении нити от положения равновесия грузик слегка поднимается вверх, приобретая, таким образом, потенциальную энергию относительно положения равновесия. Обозначим высоту подъема грузика через  $h$ . Координаты грузика при этом изменяются и оказываются равными

$$x_B = (R - L \sin \alpha) \cos \varphi, \quad y_B = (R - L \sin \alpha) \sin \varphi,$$

$$z_B = L \cos \alpha - h.$$

Отметим, что в силу малости угла  $\varphi$  малой будет и высота подъема грузика, причем критерий малости  $h$  можно получить из условия малого изменения координаты  $z_B$  по сравнению с  $z_B^0$ .

Выразим длину нити  $L$  через сумму квадратов разностей соответствующих координат верхнего и нижнего концов нити (т.е. точек  $A$  и  $B$ ) при смещении грузика из положения равновесия:

$$L^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2.$$

Отсюда после соответствующих преобразований получаем

$$h = \frac{2R(R - L \sin \alpha)}{L \cos \alpha} \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} \frac{R(R - L \sin \alpha)}{L \cos \alpha} \varphi^2.$$

Тогда сообщенная маятнику потенциальная энергия равна

$$E_p = mgh = \frac{1}{2} mg \frac{R(R - L \sin \alpha)}{L \cos \alpha} \varphi^2.$$

Определим теперь кинетическую энергию движения грузика при прохождении им положения равновесия. В этот момент грузик движется со скоростью  $v = \Omega \rho$ , где  $\Omega$  — угловая скорость вращения, а  $\rho$  — радиус  $BP$  окружности, перпендикулярной к нити. Очевидно, что  $\rho \cos \alpha = R - L \sin \alpha$ . Учитывая еще, что  $\Omega = \omega \varphi$ , где  $\omega$  — частота колебаний, для кинетической энергии движения грузика получаем

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 \frac{(R - L \sin \alpha)^2}{\cos^2 \alpha} \varphi^2.$$

В силу закона сохранения энергии,  $E_p = E_k$ , откуда для частоты малых колебаний математического маятника на внутренней поверхности прямого кругового конуса находим

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L} \frac{\cos \alpha}{1 - (L \sin \alpha)/R}}.$$

Очевидно, что частота колебаний существенно определяется геометрией конуса и длиной нити маятника. Если выражение для  $\omega$  представить в виде

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L} \frac{R \cos \alpha}{\sin \alpha \cdot \left( \frac{R^2}{4 \sin^2 \alpha} - \left( L - \frac{R}{2 \sin \alpha} \right)^2 \right)}},$$

то легко видеть, что с ростом  $L$  частота сначала убывает, достигая минимального значения

$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{2g \sin \alpha}{R}}$$

при  $L = R/(2 \sin \alpha)$ , а затем снова растет. При  $L \rightarrow 0$  и при  $L$ , приближающемся снизу к  $R/\sin \alpha$ , частота колебаний неограниченно растет. В первом случае ( $L \rightarrow 0$ ) геометрия конуса не играет никакой роли, и «поведение» частоты колебаний такое же, как и для традиционного математического маятника.

Заметим, что полученное выражение для частоты имеет физический смысл при условии  $L < R/\sin \alpha$ . В случае  $R = L \sin \alpha$  грузик маятника находится в вершине конуса, где колебания невозможны.

# ВОЗВРАЩАЮЩАЯ СИЛА И ЧАСТОТА КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ

*П. Хаджи, Л. Глазова, В. Личман*

Как известно, собственные частоты колебаний различных колебательных систем можно вычислять с помощью закона сохранения энергии. Но это не единственный метод, приводящий к успеху. В ряде случаев более приемлемым может оказаться другой метод – с использованием возвращающей силы, действующей на колебательную систему. Идея здесь состоит в следующем.

Простейшие гармонические колебания пружинного маятника совершаются под действием упругой силы, т.е. силы, величина которой пропорциональна деформации пружины, а значит, и смещению маятника  $x$  из положения равновесия:  $F = kx$ , где  $k$  – так называемый коэффициент упругости (жесткость) системы, и которая направлена в сторону, противоположную направлению смещения. Однако часто, рассматривая малые колебания более сложных систем, тоже удается представить возвращающую силу в виде  $F = kx$ , т.е. пропорциональной смещению из положения равновесия и имеющей вид квазиупругой силы с коэффициентом  $k$ , величина которого зависит от параметров системы. Зная коэффициент  $k$  и массу  $m$  колеблющегося тела, легко найти частоту собственных колебаний системы, пользуясь известной формулой для пружинного маятника

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Рассмотрим несколько конкретных примеров.

**Колебания заряженного шарика вдоль вертикальной направляющей.** Пусть вдоль непроводящей вертикальной направляющей может двигаться без трения маленький (точечный) шарик массой  $m$ , несущий заряд  $q$ . В нижнем конце направляющей неподвижно закреплен второй шарик, имеющий заряд  $Q$

---

Опубликовано в «Кванте» №3 за 2000 год.

(рис.1). Определим частоту малых колебаний первого шарика вдоль направляющей.

Случай, когда заряды  $q$  и  $Q$  являются разноименными, не представляет интереса, поэтому будем считать заряды одноименными. На подвижный шарик действует сила тяжести  $m\vec{g}$ , направленная вниз, и сила электростатического взаимодействия  $F_s$  со стороны нижнего шарика, направленная вертикально вверх (см. рис.1,а).

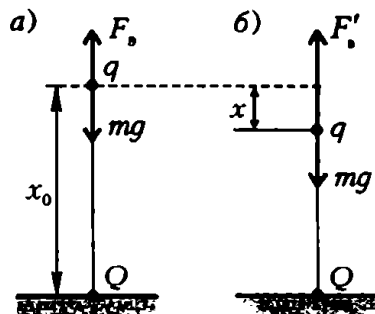


Рис. 1

Повидимому, под действием этих сил шарик может находиться в равновесии. Условие равновесия имеет вид

$$F_s = mg.$$

Найдем положение равновесия подвижного шарика, отсчитывая расстояние  $x_0$  от нижнего шарика. В соответствии с законом Кулона, сила электростатического отталкивания равна

$$F_s = qQ / (4\pi\epsilon_0 x_0^2).$$

Тогда из условия равновесия получаем

$$x_0 = \sqrt{\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 mg}}.$$

Как видно,  $x_0$  тем больше, чем больше величины зарядов  $Q$  и  $q$  и чем меньше масса подвижного шарика  $m$ .

Легко показать, что это равновесие является устойчивым. В самом деле, при смещении шарика вниз сила электростатического отталкивания возрастает, так как уменьшается расстояние между шариками, а сила тяжести не изменяется. Поэтому возникает возвращающая сила, направленная вверх, т.е. против смещения. Если же шарик сместить вверх, то сила отталкивания уменьшается, поэтому возникает возвращающая сила, направленная вниз.

Таким образом, шарик, выведенный из положения равновесия и предоставленный самому себе, будет совершать колебания относительно положения равновесия. Определим частоту этих колебаний, считая их малыми. Критерием малости колебаний является малость смещения  $x$  относительно положения равновесия по сравнению с характерной длиной в системе, какой является расстояние  $x_0$ :

$$x \ll x_0.$$



Сместим подвижный шарик, например вниз, на расстояние  $x$  (см. рис. 1, б). В этом случае на него действует сила отталкивания  $F'_2$ , которая по величине больше  $F_2$ , и неизменная сила тяжести  $mg$ , поэтому возвращающая сила, равная разности сил отталкивания и тяжести, будет равна

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{(x_0 - x)^2} - mg.$$

Приводя к общему знаменателю и расписывая в числителе квадрат разности, получаем

$$F = \frac{qQ/(4\pi\epsilon_0) - mg(x_0^2 - 2x_0x + x^2)}{(x_0 - x)^2}.$$

Первые два члена в числителе (после раскрытия скобок во втором слагаемом) дают в сумме точный ноль, а четвертым слагаемым можно пренебречь по сравнению с третьим. Кроме того, в знаменателе можно пренебречь  $x$  по сравнению с  $x_0$ . Тогда остается

$$F = \frac{2mg}{x_0} \cdot x.$$

Выражение для возвращающей силы  $F$  имеет такой же вид, что и выражение для упругой силы, где роль коэффициента «упругости» играет величина

$$k = \frac{2mg}{x_0} = 4mg \sqrt{\frac{\pi\epsilon_0 mg}{qQ}}.$$

Используя формулу для частоты малых колебаний, находим

$$\omega = 2\sqrt{g \sqrt{\frac{\pi\epsilon_0 mg}{qQ}}}.$$

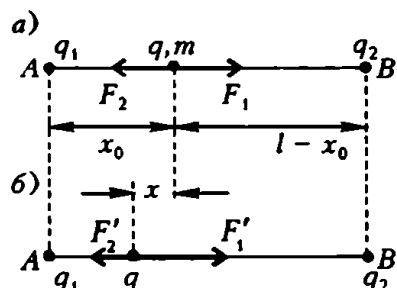


Рис. 2

Частота колебаний заряженного шарика тем меньше, чем больше величины зарядов и чем меньше масса шарика.

**Колебания заряженного шарика в поле двух других точечных зарядов.** Рассмотрим два маленьких шарика с зарядами  $q_1$  и  $q_2$ , закрепленные в точках A и B на расстоянии  $l$  друг от друга (рис. 2). Вдоль направляющей,

соединяющей оба шарика, может двигаться без трения третий шарик с массой  $m$  и зарядом  $q$ . Предполагая все заряды одноименными, определим частоту колебаний среднего шарика.

Так как все заряды одноименные, на средний (подвижный) шарик будут действовать силы отталкивания  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  со стороны зарядов  $q_1$  и  $q_2$  соответственно, направленные в противоположные стороны (см. рис. 2, а). По-видимому, в этом случае возможно такое расположение среднего шарика, когда обе силы равны по величине и компенсируют друг друга. Точка, в которой при этом располагается средний шарик, и будет положением равновесия.

Выясним, является ли это равновесие устойчивым. Для этого будем смещать шарик относительно положения равновесия вправо или влево. При небольшом смещении влево (см. рис. 2, б) сила отталкивания  $F_1'$  со стороны заряда  $q_1$  возрастает, так как расстояние между зарядами  $q_1$  и  $q$  уменьшается, а сила отталкивания  $F_2'$  со стороны заряда  $q_2$  уменьшается, поэтому возникает действующая на средний шарик разность сил, направленная к положению равновесия. Если отпустить шарик, то он начнет перемещаться в направлении положения равновесия. Аналогичная ситуация возникает и при смещении шарика вправо.

Таким образом, можно утверждать, что при продольных смещениях шарика относительно положения равновесия всегда возникает возвращающая сила, направленная в сторону, противоположную смещению. Если шарик предоставить самому себе, то он будет совершать колебания вдоль направляющей. Определим положение равновесия  $x_0$ , отсчитывая его от точки А. Используя выражение для закона Кулона, запишем условие равновесия

$$\frac{qq_1}{4\pi\epsilon_0 x_0^2} = \frac{qq_2}{4\pi\epsilon_0 (l - x_0)^2},$$

откуда найдем

$$x_0 = \frac{l}{\left(1 + \sqrt{q_2/q_1}\right)}.$$

Видно, что расстояние  $x_0$  от точки А до положения равновесия подвижного шарика пропорционально расстоянию  $l$  между двумя крайними (закрепленными) шариками и зависит еще только от отношения величин зарядов  $q_2/q_1$  этих шариков.

Найдем теперь частоту малых колебаний среднего шарика. Под малыми будем понимать такие колебания, при которых смещение из положения равновесия намного меньше характерного расстояния в системе. В качестве такового здесь следует

принять  $x_0$  либо  $l - x_0$  (меньшее из них). Таким образом, критерий малости колебаний имеет вид

$$x \ll x_0, l - x_0.$$

Предположим, что подвижный шарик сместился влево на расстояние  $x$  от положения равновесия (см. рис. 2, б). Тогда силы отталкивания со стороны зарядов  $q_1$  и  $q_2$  будут равны, соответственно,

$$F'_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_1}{(x_0 - x)^2} \text{ и } F'_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_2}{(l - x_0 + x)^2},$$

а возвращающая сила, равная их разности и направленная к положению равновесия, будет равна

$$F = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{(x_0 - x)^2} - \frac{q_2}{(l - x_0 + x)^2} \right).$$

Из этого выражения явно не видно, что возвращающая сила имеет квазиупругий характер, тем не менее при малых значениях отклонения  $x$  (в рамках критерия малости) она действительно является квазиупругой. Для того чтобы это показать, приведем выражение для  $F$  к общему знаменателю, распишем подробнее выражение в числителе, воспользуемся условием равновесия и критерием малости колебаний. В результате получим

$$F = \frac{q(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2})^4}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{q_1 q_2} l^3} \cdot x.$$

Эта формула уже похожа на выражение для квазиупругой силы. Коэффициент пропорциональности перед  $x$  выполняет роль коэффициента «упругости»  $k$ . Тогда для частоты малых колебаний находим

$$\omega = \frac{(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2})^2}{l} \sqrt{\frac{q}{2\pi\epsilon_0 m l \sqrt{q_1 q_2}}}.$$

Частота колебаний симметрично, но сложным образом, зависит от величин зарядов  $q_1$  и  $q_2$ .

**Колебания шара в жидкости.** Определим частоту малых вертикальных колебаний шара радиусом  $R$ , погруженного в жидкость (рис. 3), пренебрегая сопротивлением жидкости и присоединенной массой.

В положении равновесия на шар действуют две силы: сила тяжести  $m\vec{g}$  и выталкивающая, или архимедова, сила  $\vec{F}_A$  со

стороны жидкости (см. рис. 3, а). Они равны по величине и противоположны по направлению. В проекции на вертикальную ось условие равновесия выражается формулой

$$mg = F_A.$$

Поскольку

$$m = 4/3\pi\rho R^3 \text{ и } F_A = \pi\rho_1 g H^2 (3R - H)/3,$$

где  $\rho$  — плотность шара и  $\rho_1$  — плотность жидкости, получаем

$$4\rho R^3 = \rho_1 H^2 (3R - H).$$

Отсюда при заданных  $R$  и  $H$  можно определить отношение плотностей  $\rho/\rho_1$ .

Выведем шар из положения равновесия, дополнительно погрузив его в жидкость на глубину  $x$  (см. рис. 3, б). В этом случае выталкивающая сила увеличивается по сравнению с равновесной, за счет чего возникает возвращающая сила, равная

$$F = F'_A - mg.$$

Так как полная глубина погружения шарового сегмента теперь равна  $H + x$ , то

$$F'_A = \pi\rho_1 g (H + x)^2 (3R - H - x)/3,$$

и

$$F = \pi\rho_1 g x \left( H(2R - H) + (R - H)x - 1/3 x^2 \right).$$

Критерием малости колебаний здесь является неравенство  $x \ll H$ . Тогда вторым и третьим слагаемыми можно пренебречь в силу их малости, и для возвращающей силы получаем

$$F = \pi\rho_1 g H (2R - H) \cdot x.$$

Следовательно, возвращающая сила пропорциональна смещению из положения равновесия  $x$  и, как отмечалось, направлена в сторону, противоположную этому смещению.<sup>1</sup> Под действием этой силы шар совершает колебательное движение: то погружа-

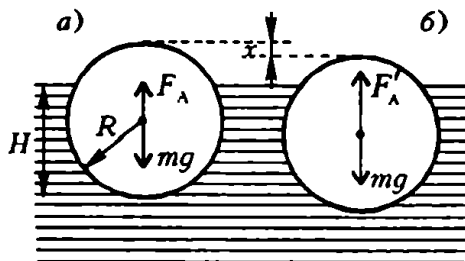


Рис. 3

<sup>1</sup> Легко увидеть, что возвращающая сила равна  $\rho_1 g S x$ , где  $S = \pi H (2R - H)$  — площадь сечения шара поверхностью жидкости (в положении равновесия). Именно на столько изменяется вес вытесненной жидкости при дополнительном погружении шара на малую глубину  $x$ . (Прим. ред.)

ясь, то всплывая. Коэффициент перед  $x$  играет роль коэффициента «упругости»  $k$ , поэтому частота колебаний шара в жидкости будет равна

$$\omega = \sqrt{3 \frac{2R - H}{3R - H} \frac{g}{H}}.$$

Частота колебаний полностью определяется радиусом шара и глубиной его погружения в условиях равновесия.

В принципе можно выразить частоту колебаний и через отношение плотностей  $\rho$  и  $\rho_1$ .

**Комбинированный маятник.** Представим себе жесткий невесомый стержень длиной  $L$ , к нижнему концу которого подвешено точечное тело массой  $m$ , а на расстоянии  $l$  от оси вращения к стержню прикреплена пружинка с коэффициентом упругости  $k$ ,

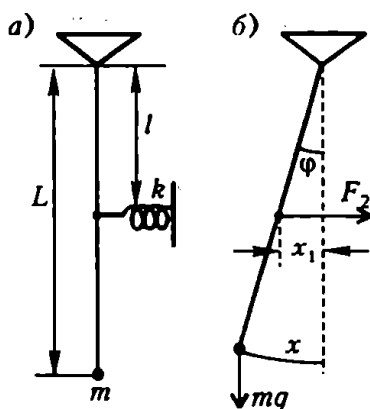


Рис. 4

которая в положении равновесия маятника не деформирована (рис.4). Определим частоту малых колебаний такого маятника.

В положении равновесия стержень маятника располагается вдоль вертикали (см. рис.4,а). Отклоним стержень относительно вертикали на небольшой угол  $\varphi$ , такой, что  $\varphi \ll 1$  (критерий малых колебаний). В этом положении на грузик маятника действует сила тяжести  $mg$ , направленная вниз, а на стержень в точке крепления пружинки действует сила упругости, равная  $F_2 = kx_1$ ,

где  $x_1 = \varphi l$  — линейное смещение этой точки стержня относительно положения равновесия. При малых углах отклонения сила  $\vec{F}_2$  направлена практически горизонтально. Возвращающая сила  $\vec{F}_1$ , действующая непосредственно на грузик, направлена по касательной к его траектории движения (окружности) и определяется выражением

$$F_1 = mg \sin \varphi \approx mg \varphi = mgx/L,$$

где  $x$  — смещение грузика вдоль дуги окружности. Из рисунка 4,б видно, что  $x_1/x = l/L$ .

Поскольку силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  приложены к разным точкам системы, ясно, что ни одна из них не является результирующей возвращающей силой. Чтобы определить эту силу, поступим

следующим образом. Найдем полный момент сил  $M$ , действующий на систему и возвращающий ее в положение равновесия:

$$M = F_1 L + F_2 l = (mgx/L)L + (klx/L)l.$$

Считая теперь, что этот момент сил действует непосредственно на колеблющийся грузик маятника, найдем результирующую возвращающую силу  $F$ , деля момент сил  $M$  на плечо этой силы  $L$ :

$$F = \left( \frac{mg}{L} + \frac{kl^2}{L^2} \right) \cdot x.$$

Роль коэффициента упругости здесь играет весь множитель в скобках перед  $x$ , поэтому для частоты колебаний находим

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{k}{m} \frac{l^2}{L^2}}.$$

Видно, что частота колебаний комбинированного маятника определяется как геометрией маятника, т.е. длинами  $L$  и  $l$ , так и массой грузика  $m$ . Если положить  $k = 0$  (пружинка отсутствует) либо  $l = 0$  (пружинка прикреплена к оси маятника и не действует на стержень), то получаем известное выражение для частоты колебаний математического маятника  $\omega = \sqrt{g/L}$ .

*А. Самбелашвили*

В 1994 году на Международном турнире юных физиков в Голландии его участникам была предложена такая задача:

«Имеется массивная стальная плита, расположенная горизонтально и колеблющаяся вдоль вертикали по гармоническому закону с амплитудой  $A \approx 3$  мм и частотой  $\omega \approx 500$  с<sup>-1</sup>. На плиту кладут маленький (радиусом  $\approx 1$  мм) стальной шарик, который вследствие соударений с плитой начинает подпрыгивать вверх-вниз. Определите, как меняется средняя (за некоторый промежуток времени) максимальная высота подскока шарика со временем, и объясните полученные результаты».

Задача эта привлекательна своей кажущейся простотой и одновременно связью с фундаментальными физическими представлениями. О них будет сказано ниже, а пока попробуем ответить на вопрос задачи, т.е. определить (хотя бы качественно) зависимость средней максимальной высоты подскока шарика от времени. Быстрее всего это можно сделать, проведя эксперимент. Собрать установку, описанную в задаче, — дело несложное. Существует множество различных способов заставить плиту колебаться, один из них — присоединить ее с помощью кривошипного механизма к обыкновенному электромотору. Чтобы шарик подпрыгивал вдоль вертикали и не отскакивал в стороны, над плитой можно поставить трубку с прозрачными стенками. Если же вы умеете программировать, то вам не составит большого труда смоделировать задачу на компьютере.

Тот, кто не пожалеет времени на создание модели, вознаградит себя наблюдением удивительного, на первый взгляд, явления: средняя высота подскока шарика будет постепенно увеличиваться с течением времени до тех пор, пока не достигнет некоторого предельного значения. Этот эффект получил название «ускорения», а сама установка — «гравитационной маши-

---

Опубликовано в «Кванте» №6 за 1997 год.

ны», поскольку гравитационное притяжение служит механизмом, возвращающим шарик назад к плите.

Попробуем объяснить увиденное. Прежде всего запишем законы движения шарика и плиты, направив ось  $X$  вертикально вверх, а за начало координат выбрав положение равновесия, относительно которого колеблется плита:

$$x_{\text{ш}}(t) = x_{\text{п}}(t_n) + v_n(t - t_n) - \frac{g(t - t_n)^2}{2},$$

$$x_{\text{п}}(t) = A \sin \omega t,$$

где  $x_{\text{ш}}(t)$  — координата шарика в момент времени  $t$ ,  $x_{\text{п}}(t)$  — координата плиты,  $t_n$  — момент  $n$ -го по счету столкновения шарика с плитой,  $v_n$  — абсолютная величина скорости шарика непосредственно после  $n$ -го столкновения. Первое уравнение описывает движение шарика в промежутках между соударениями. При соударениях его скорость меняется скачком. Пусть  $t_{n+1}$  — момент времени  $(n + 1)$ -го столкновения. В этот момент скорость плиты

$$v_{\text{п}} = x'_{\text{п}}(t_{n+1}) = A\omega \cos(\omega t_{n+1}).$$

Примем в качестве допущения (оно оправдывается экспериментом), что максимальная высота подскоков шарика велика по сравнению с амплитудой колебаний плиты. Это позволит нам считать скорости шарика (здесь и далее под скоростью подразумевается ее абсолютная величина) сразу после  $n$ -го и непосредственно перед  $(n + 1)$ -м столкновениями приблизительно равными. Полагая соударения абсолютно упругими, нетрудно получить выражение для скорости шарика непосредственно после  $(n + 1)$ -го соударения:

$$v_{n+1} = v_n + 2v_{\text{п}} = v_n + 2A\omega \cos \varphi_{n+1},$$

где  $\varphi_{n+1} = \omega t_{n+1}$  — фаза колебаний плиты в момент  $(n + 1)$ -го соударения. Последнее соотношение показывает, что при  $\varphi_{n+1} \in$

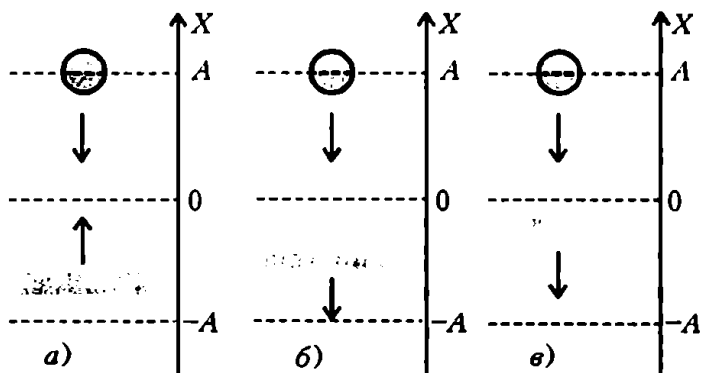
$\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$   $\cos \varphi_{n+1} > 0$ , т.е. плита в момент соударения движется вверх, навстречу шарiku. В результате столкновения скорость шарика возрастает, следовательно, возрастает его энергия  $mv_n^2/2$  и максимальная высота подскока  $h_n = v_n^2/(2g)$ . При

$\varphi_{n+1} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$   $\cos \varphi_{n+1} < 0$  — плита в момент соударения



движется вниз, как бы убегая от шарика, поэтому его скорость, энергия и максимальная высота подскока в результате столкновения уменьшаются. Таким образом, максимальная высота подскока полностью зависит от того, какую фазу  $\varphi_n$  имела плита в момент столкновения  $t_n$ .

Наблюдаемое в эксперименте увеличение средней максимальной высоты подскока шарика с течением времени наводит на мысль о том, что шарик чаще сталкивается с плитой, движущейся навстречу ему, чем с движущейся от него. Для обоснования этого утверждения рассмотрим систему шарик – плита в момент времени  $t^*$ , в который шарик падает вниз и имеет координату  $x(t^*) = A$ . Для движения плиты в момент  $t^*$  возможны несколько случаев.



1) Фаза плиты  $\varphi(t^*) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$  (см. рис.а). Плита движется вверх, навстречу шарiku, следовательно, столкновение приведет к увеличению энергии шарика.

2)  $\varphi(t^*) \in \left[\frac{3\pi}{2} - \epsilon, \frac{3\pi}{2}\right]$  (рис.б). Плита движется вниз и имеет координату, близкую к  $-A$ . При достаточно малом  $\epsilon$  за время падения шарика в пределах  $x \in [-A, A]$  плита успеет достигнуть нижней точки  $x = -A$  и изменить направление своего движения. В этом случае столкновение шарика с плитой произойдет при их движении навстречу друг другу, и в результате энергия шарика увеличится.

3)  $\varphi(t^*) \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} - \epsilon\right]$  (рис.в). Плита движется вниз, причем ее координата намного отличается от  $-A$ , так что за время падения шарика от положения  $x(t^*) = A$  она не успевает

достигнуть нижней точки  $x = -A$  и изменить направление движения. В этом случае столкновение шарика с убегающей плитой приведет к уменьшению его энергии.

Итак, увеличению энергии шарика соответствует промежуток фаз  $\varphi(t^*) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2} - \epsilon, 2\pi\right]$ , а уменьшению — промежуток  $\varphi(t^*) \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} - \epsilon\right]$ . Как видно, первый промежуток шире, чем второй. Если предположить, что в момент  $t^*$  фаза плиты с равной вероятностью принимает значения от 0 до  $2\pi$ , то наши рассуждения приводят к такому выводу: столкновения шарика с плитой, движущейся навстречу, более вероятны, чем с движущейся в том же направлении, и, следовательно, происходят чаще. Значит, в среднем шарик чаще получает энергию, чем отдает, что и объясняет наблюдаемый рост средней максимальной высоты его подскока.

В реальных условиях столкновения не могут быть абсолютно упругими, т.е. происходит переход энергии в тепло (диссипация). Этим фактом обусловлено существование предельной максимальной высоты подскока.

Задачу можно было бы считать решенной, если бы не предположение о равновероятном распределении фазы плиты в момент времени  $t^*$ . Вообще говоря, фазу столкновения всегда можно определить точно из законов движения шарика и плиты, почему же мы говорим о ней как о случайной величине, да еще и равномерно распределенной? Все дело тут в слове «точно». В действительности всякая физическая величина может быть определена лишь с известной степенью точности. Оказывается, если в определении фазы некоторого столкновения мы ошибемся на число порядка  $2\pi \cdot 10^{-3}$ , то уже через несколько столкновений значение фазы, полученное из расчета, будет отличаться от действительного на величину, сравнимую с  $2\pi$ . Системы, в которых малое отклонение в значениях определяющих параметров приводит к существенным изменениям, в динамике принято называть хаотическими. Поведение таких систем на практике почти никогда не удастся предсказать в точности, и поэтому об их состоянии в некоторый момент времени говорят с той или иной долей вероятности, как если бы на движение этих систем влияли случайные факторы.

Идея механической модели, описанной в задаче, впервые была предложена Э.Ферми для объяснения громадных энергий

частиц, прилетающих на Землю. Потоки частиц, «сталкиваясь» с переменными магнитными полями галактик и газовых скоплений, ускоряются подобно тому, как ускоряется шарик при соударениях с массивной плитой.

В этой связи возникает вопрос: может ли ускорение шарика продолжаться неограниченно долго? В случае неупругого столкновения ответ ясен: нет, не может, так как теряемая в виде тепла энергия увеличивается с ростом энергии шарика. Интересно, что, даже если соударения упругие, все равно энергия шарика будет ограничена. Хотя, согласно нашим рассуждениям, средняя энергия шарика должна возрастать, тем не менее, нужно понимать, что выражение для скорости шарика справедливо только в предположении, что энергия плиты много больше энергии подпрыгивающего шарика. Иными словами, мы считаем, что массивная плита значительно изменяет энергию шарика, а шарик на движение плиты почти не влияет. Это допущение становится неверным, если средние энергии шарика и плиты сравнимы по величине. В этом случае, как нетрудно показать, увеличения средней энергии шарика при его столкновении с движущейся навстречу плитой не происходит. Таким образом, средняя энергия шарика будет возрастать до тех пор, пока не станет сравнимой со средней энергией плиты.

Если интерпретировать шарик как малую частицу, а плиту как газ из массивных молекул, в который эта частица помещена, то наши рассуждения позволяют заключить, что средняя кинетическая энергия частицы будет увеличиваться, пока не сравняется со средней кинетической энергией молекул газа. Усмотрев это следствие из знаменитой теоремы Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы в задаче про гравитационную машину, мы могли бы сразу дать ответ на поставленный в ней вопрос. Необходимо заметить, однако, что правомерность обращения к теореме Больцмана существенно связана с хаотичностью (со стохастичностью) системы шарик — плита. Характерной особенностью таких систем является своеобразная эволюция в их описании. Точно заданные законы движения содержат в себе хаотичность (при определенных условиях), которая в результате приводит к необходимости вероятностного описания.

## КАК ЗАВИСИТ $U$ ОТ $p$ ?

*А. Черноуцан*

Сформулируем вопрос более конкретно: как меняется внутренняя энергия вещества при повышении давления, если температура при этом остается постоянной, т.е. происходит изотермическое сжатие? Оговоримся сразу, что речь идет не о любых веществах, а только о достаточно простых. Простых в том смысле, что они, во-первых, являются однородными и изотропными. (Мы, тем самым, отвлечемся от фазовых переходов, т.е. будем считать, что вещество состоит из одной фазы.) Во-вторых, будем для ясности предполагать, что рассматриваемые вещества являются однокомпонентными, а не смесью различных химических компонентов с какими-то концентрациями. Равновесное состояние таких веществ – их называют термодинамически простыми – определяется только двумя параметрами, например температурой  $T$  и давлением  $p$ .

Последняя фраза ясно показывает, что внутренняя энергия, вообще говоря, зависит не только от температуры, но и от давления. Тем не менее, многие школьники считают, что внутренняя энергия зависит только от температуры. Это связано с тем, что понятие внутренней энергии наиболее подробно обсуждается при изучении идеального газа, для которого внутренняя энергия действительно зависит только от температуры.

Вспомним, что температура есть мера средней кинетической энергии молекул. Энергия идеального газа определяется только кинетической энергией молекул, а потенциальная энергия их взаимодействия пренебрежимо мала. Однако в случае жидкостей потенциальная энергия составляет существенную часть общей энергии. Это видно хотя бы из того, что при испарении жидкости затрачивается много энергии, которая подводится к жидкости в

виде тепла. Испарение происходит при постоянной температуре, и подведенное тепло идет, главным образом, на увеличение потенциальной энергии взаимодействия молекул.

Однако и в случае жидкостей и твердых тел, когда внутренняя энергия должна зависеть от давления, школьникам нигде не приходится с этой зависимостью сталкиваться. Например, в задачах на тепловой баланс, даже когда это прямо не указывается, всегда предполагается, что все процессы теплообмена происходят при постоянном внешнем давлении. Удельные теплоемкости, которые используются в этих задачах, это теплоемкости при постоянном давлении  $c_p$  (хотя у жидкостей  $c_p$  и теплоемкости при постоянном объеме  $c_v$  отличаются очень мало). А как можно оценить, на сколько изменяется внутренняя энергия жидкости, если меняется не температура, а, наоборот, только давление?

Отметим сразу, что вопрос о том, как изменяются свойства вещества под воздействием давления, отнюдь не вызван праздным любопытством, а является весьма интересным и важным. Для изучения таких изменений ученые строят мощные прессы, стараясь создать как можно более высокие давления и измерить параметры вещества в этих экстремальных условиях. Но нужны ли столь высокие давления и дорогие прессы? Опираясь на простые оценки, которые мы сделаем при не очень высоких давлениях, постараемся понять, при каких давлениях можно ожидать самых интересных изменений в свойствах веществ.

В качестве объекта исследования выберем какую-нибудь жидкость, например ртуть, и подвергнем ее изотермическому сжатию от нормального давления  $p_0 = 1$  атм до давления  $p$ . Объем ртути при этом уменьшается пропорционально изменению давления:

$$\frac{\delta V_T}{V} = -K_T \Delta p,$$

где  $K_T$  – так называемая изотермическая сжимаемость вещества, значение которой можно найти в соответствующей таблице. Знак « $\leftarrow$ » показывает, что при увеличении давления объем уменьшается. Получаем

$$\delta V_T = -K_T V(p - p_0).$$

Для ртути  $K_T = 4 \cdot 10^{-11}$  Па $^{-1}$ , значит, при изменении давления на 1 атм относительное изменение объема составляет величину порядка  $10^{-5}$  (у большинства жидкостей сжимаемость на порядок выше – у воды, например,  $K_T \approx 4 \cdot 10^{-10}$  Па $^{-1}$ ). Ясно, что при

таким ничтожным изменением объема работа

$$A_T = p_{cp} \delta V_T = -\frac{p_0 + p}{2} K_T V (p - p_0) = -\frac{1}{2\rho} K_T (p^2 - p_0^2) m$$

будет очень мала: при повышении давления до  $p = 2$  атм работа в расчете на  $m = 1$  кг ртути (плотность ртути  $\rho = 13,6 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>) составит примерно  $4 \cdot 10^{-5}$  Дж. (Для воды  $\approx 6 \cdot 10^{-3}$  Дж.) Правда, сосчитав работу, мы ничего пока не можем сказать о том, сколько пришлось забрать (или подвести) тепла для поддержания постоянной температуры, а значит, не можем узнать, как изменилась внутренняя энергия вещества. В рамках первого начала (закона) термодинамики преодолеть эту неопределенность невозможно.

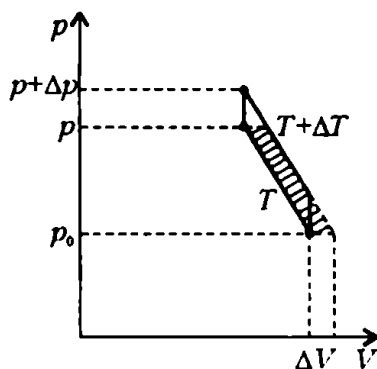
Однако, если воспользоваться даже теми немногими сведениями, которые можно почерпнуть из школьного учебника о втором начале термодинамики, мы сможем продвинуться гораздо дальше. А именно, воспользуемся теоремой Карно, которая утверждает, что все обратимые машины, получающие тепло только от резервуара с температурой  $T_1$  и отдающие тепло только резервуару с температурой  $T_2$ , имеют один и тот же КПД

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

независимо от того, что именно используется в качестве рабочего тела машины. Чтобы с помощью теоремы Карно получить какое-нибудь конкретное физическое соотношение, надо построить бесконечно узкий цикл Карно, где тепло отдается при температуре  $T$ , а получается при температуре  $T + \Delta T$ , найти получаемое тепло  $Q_1$  и работу  $\delta A$ , вычислить КПД  $\eta = \delta A/Q_1$  и приравнять его к  $\eta = \Delta T/T$ . Этот метод называется методом циклов (он используется, например, в следующей статье).

Как же сформировать цикл Карно в нашем случае, чтобы с его помощью выяснить, какое количество теплоты (и какого знака) мы должны были подвести к ртути при ее изотермическом сжатии? Поступим следующим образом (см. рисунок).

После окончания изотермического сжатия подвергнем жидкость небольшому адиабатическому сжатию, т.е. увеличим давление на  $\Delta p$  без подвода тепла. При этом температура жидкости изменится на  $\Delta T$ . Увеличится температура или умень-



шится, т.е. знак  $\Delta T$ , мы выясним позже, а сейчас заметим, что этот знак очевидным образом связан с тем, подводили мы тепло или отбирали при изотермическом сжатии. Действительно, если для поддержания постоянной температуры мы были вынуждены тепло отбирать, то после того, как мы перестанем это делать, жидкость будет нагреваться ( $\Delta T > 0$ ). (Именно так, как мы увидим, обстоит дело для большинства жидкостей. Это может быть не так только для самой необычной жидкости — для воды.) Следующим шагом изотермически (при температуре  $T + \Delta T$ ) уменьшим давление до значения, чуть большего  $p_0$ , после чего адиабатически вернем жидкость в начальное состояние.

Получившийся цикл Карно, хотя и изображен на рисунке сильно растянутым по горизонтали (на самом деле все линии на графике почти вертикальны), имеет вид узкой полоски. Работа  $\delta A$  в цикле равна площади этой полоски. Проведем из двух вершин цикла два горизонтальных отрезка — две изобары при давлениях  $p_0$  и  $p$ . Площадь заштрихованной на рисунке фигуры, состоящей из двух изотерм и двух изобар, практически равна площади нашего цикла Карно. Сосчитать эту площадь нетрудно: она равна произведению  $p - p_0$  на  $\Delta V$ , а изменение объема, вызванное изменением температуры жидкости на  $\Delta T$  при постоянном давлении, может быть выражено через обычный коэффициент теплового расширения  $\alpha$ :

$$\frac{\Delta V}{V} = \alpha \Delta T.$$

Это соотношение позволит нам не только вычислить  $\Delta V$ , но и выяснить, когда  $\Delta T$  положительно, а когда отрицательно. Так, если коэффициент теплового расширения положителен (что верно для большинства нормальных жидкостей), то  $\Delta T > 0$ , значит, при изотермическом сжатии тепло у жидкости надо забирать, а при адиабатическом сжатии жидкость нагревается. Если же коэффициент теплового расширения отрицателен (как для воды в интервале от 0 до 4 °C), то при адиабатическом сжатии жидкость охлаждается, а при изотермическом — поглощает тепло.

Перейдем к расчетам. Работа за цикл равна

$$\delta A = (p - p_0) \Delta V = (p - p_0) \alpha V \Delta T.$$

Подставим это выражение в формулу для КПД цикла Карно и запишем теорему Карно:

$$\frac{(p - p_0) \alpha V \Delta T}{Q} = \frac{\Delta T}{T},$$

откуда получим, что количество теплоты, отобранное у жидкости при изотермическом сжатии, равно

$$Q = (p - p_0)\alpha VT = \frac{\alpha T(p - p_0)}{\rho} m.$$

Сделаем численные оценки. Для ртути  $\alpha \approx 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$  (при температуре 300 К), т.е. при изотермическом сжатии до  $p = 2$  атм от 1 кг ртути надо забрать примерно 0,4 Дж тепла. (Если тепло не отводить, т.е. увеличивать давление адиабатически, то ртуть нагреется примерно на 0,003 К, так как удельная теплоемкость ртути 138 Дж/кг.) Сравнивая с работой, которая совершается при сжатии ртути до 2 атм, видим, что работа в  $10^4$  раз меньше отбираемого количества теплоты. Это же самое верно и для изменения внутренней энергии: при изотермическом сжатии изменение внутренней энергии

$$\Delta U = - \frac{\alpha T(p - p_0)}{\rho} m$$

на несколько порядков больше работы по сжатию жидкости. Вспомним, что при изотермическом сжатии идеального газа  $\Delta U = 0$ , а работа равна подведенному количеству теплоты.

При каких же давлениях можно ожидать значительного изменения структуры и свойств жидкостей и качественно нового ее поведения? Оценим, при каких давлениях изменение внутренней энергии будет равно потенциальной энергии взаимодействия атомов 1 кг ртути, которую будем считать равной удельной теплоте испарения  $r$ . Для ртути  $r \approx 3 \cdot 10^5$  Дж/кг, поэтому равенство  $\Delta U = r$  наступит при давлении  $p \sim 10^6$  атм. В современных прессах удастся достичь давлений в несколько десятков тысяч атмосфер, причем в достаточно больших объемах вещества, когда можно производить тщательное исследование свойств этого вещества. Рекордных же давлений в миллионы атмосфер, к которым, как теперь понятно, не зря стремятся ученые, сегодня удастся достичь лишь на короткое время и в ничтожных объемах вещества – на кончике алмазной иглы.



А. Черноуцан

Внутренняя энергия – важнейший параметр любой термодинамической системы. Зависимость внутренней энергии системы от основных параметров, определяющих ее равновесное состояние, изучается как в рамках термодинамики, так и методами статистической физики.

**Справка.** В случае однородной однокомпонентной термодинамической системы основных параметров два – например, температура и объем. Говорят, что такая система обладает двумя термодинамическими степенями свободы. Значит, каждому равновесному состоянию системы можно сопоставить одну точку на координатной плоскости  $(V, T)$ , а равновесный (квазиравновесный) процесс изображается линией на этой плоскости. Значение третьего параметра – давления  $p$  – в каждой точке плоскости можно вычислить с помощью уравнения состояния (в случае идеального газа, например, с помощью уравнения Клапейрона–Менделеева).

Возникает естественный вопрос: существует ли какая-нибудь связь между уравнением состояния системы и зависимостью внутренней энергии  $U$  от параметров, определяющих это состояние? Можно ли, зная функцию  $p(V, T)$ , что-либо узнать о функции  $U(V, T)$ ? Простейший (но очень важный) полигон для изучения этого вопроса – хорошо вам знакомый идеальный газ. Однако начнем мы с того, что вспомним и систематизируем сведения об идеальном газе, известные из школьного курса.

## Идеальный газ в термодинамике. Закон Джоуля

Чем более разреженным является реальный газ, тем ближе он к идеальному. Многочисленные эксперименты действительно показали, что чем более разрежен газ, тем точнее он подчиняется уравнению Клапейрона–Менделеева

$$pV = \nu RT. \quad (1)$$

Можно сказать, что, с точки зрения термодинамики, идеальным называется газ, точно подчиняющийся уравнению состояния (1).

В рамках первого закона (начала, постулата) термодинамики, выражающего закон сохранения энергии с учетом тепловых процессов, невозможно, исходя только из уравнения состояния (1), получить какую-либо информацию о виде функции  $U(V, T)$ . Крупнейшие физики прошлого столетия (Гей-Люссак, Джоуль, Томсон) затратили значительные экспериментальные усилия для установления этой зависимости. Из их экспериментов убедительно следовало, что внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры:

$$U(V, T) = U(T), \text{ или } U(V_1, T) = U(V_2, T).$$

Это соотношение называют законом Джоуля. Оно выполняется тем точнее, чем более разреженным является газ, т.е. чем точнее он подчиняется уравнению состояния (1).

Закон Джоуля позволяет выразить внутреннюю энергию через другой параметр, более удобный для экспериментального определения, — теплоемкость при постоянном объеме  $C_V$ . Поскольку работа в изохорном процессе равна нулю, из первого закона термодинамики:  $Q = \Delta U$  и определения теплоемкости:  $Q = C_V \Delta T$  следует, что теплоемкость при постоянном объеме есть производная внутренней энергии по температуре:

$$C_V = U'(T),$$

а внутренняя энергия, соответственно, — первообразная от теплоемкости:

$$U(T) = \int C_V dT.$$

Опыт показывает, что теплоемкость любого разреженного газа остается постоянной в широком диапазоне температур: от 10–40 К до 1000–2000 К. Теплоемкость одного моля (молярная теплоемкость) любого одноатомного газа в этом диапазоне температур одна и та же и равна  $1,5R$ , двухатомного —  $2,5 R$ , многоатомного —  $3R$ . В этом случае для внутренней энергии можно использовать простое выражение

$$U = C_V T \quad (2)$$

(напомним, что энергия всегда определяется с точностью до константы).

## Экспериментальное подтверждение закона Джоуля

Эксперименты, приведшие к установлению закона Джоуля, интересны не только с исторической точки зрения. Опишем кратко физический смысл этих опытов.

а) **Расширение газа в пустоту. Опыты Гей-Люссака и Джоуля.** Что произойдет, если позволить газу свободно расширяться в пустоту? Например, можно

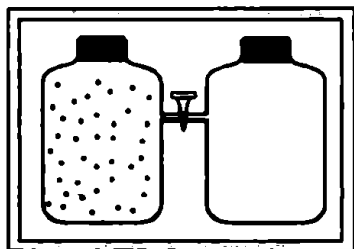


Рис. 1

соединить два сосуда — один с газом, другой откачанный — трубкой с краном (рис. 1) и наблюдать за изменением температуры газа после открывания крана. Как Гей-Люссак, так и повторивший его опыты (в усовершенствованном виде) Джоуль пришли к выводу, что температура достаточно разреженного газа в конечном состоянии такая же, как в начальном. Однако только

Джоуль сумел сделать из этого результата правильный вывод: *внутренняя энергия разреженного (идеального) газа не зависит от объема!*

При расширении в пустоту газ не получает тепла (теплообменом за малое время расширения можно пренебречь) и не совершает работу. Из первого закона термодинамики следует, что изменение внутренней энергии за время расширения также равно нулю. Из опытов получаем

$$U(V_1, T) = U(V_2, T),$$

где  $V_1$ ,  $V_2$  — начальный и конечный объемы газа.

При анализе расширения газа в пустоту многие школьники допускают характерную ошибку. Исходя из того, что тепло в этом процессе не подводится, они делают вывод, что это не что иное, как адиабатический процесс, а при адиабатическом расширении, говорят они, газ охлаждается! Ошибка состоит в том, что адиабатический процесс — это равновесный процесс, происходящий при очень медленном расширении газа без подвода тепла. При таком расширении газ совершает работу над медленно перемещающейся перегородкой, и его внутренняя энергия действительно уменьшается. Расширение же в пустоту — процесс неравновесный, газ расширяется свободно, не совершая работы над стенками сосуда, которые остаются неподвижными.

А что же будет, если расширению в пустоту подвергнуть плотный газ, в поведении которого наблюдаются заметные отклонения от идеальности? Оказывается, температура такого

(реального) газа при расширении уменьшается. Дело в том, что в реальных газах заметную роль играет притяжение между молекулами и связанная с этим притяжением потенциальная энергия взаимодействия между молекулами газа. При расширении среднее расстояние между молекулами увеличивается, силы притяжения совершают отрицательную работу, и потенциальная энергия увеличивается. А поскольку полная внутренняя энергия остается постоянной, кинетическая энергия молекул, а значит, и температура газа уменьшаются.

**Справка.** Наиболее удачной и широко применяемой моделью реального газа является газ Ван-дер-Ваальса, подчиняющийся уравнению состояния

$$(V - b) \left( p + \frac{a}{V^2} \right) = RT \quad (3)$$

(для одного моля газа). Постоянные Ван-дер-Ваальса  $a$  и  $b$  учитывают притяжение между молекулами на больших расстояниях (постоянная  $a$ ) и сильное отталкивание на малых (постоянная  $b$ ). Это отталкивание делает недоступным внутреннее пространство данной молекулы для остальных молекул и уменьшает общий свободный объем. Внутренняя энергия одного моля газа Ван-дер-Ваальса равна

$$U = C_v T - \frac{a}{V}. \quad (4)$$

**Пример.** Для кислорода  $a = 0,137 \text{ Па} \cdot \text{м}^6/\text{моль}^2$ . Один моль кислорода находится в сосуде объемом 10 л. На сколько понизится температура газа после соединения данного сосуда с другим сосудом объемом тоже 10 л, но полностью откачанным? (Напомним, что для моля кислорода  $C_v = 2,5R$ .) **Ответ:** на 0,33 К.

**б) Процесс Джоуля–Томсона.** Опыты по расширению газа в пустоту не обладали высокой точностью и не могли служить надежным обоснованием закона Джоуля. Совместно с Томсоном Джоуль провел серию опытов по просачиванию газа через пористую перегородку. В двух частях теплоизолированного цилиндрического сосуда, разделенных пористой перегородкой (в опытах Джоуля–Томсона использовалась пробка из плотной ваты и очесов шелка), находится исследуемый газ (рис.2). Если в левой части сосуда поддерживать постоянное давление  $p_1$ , а в правой — меньшее давление  $p_2$ , то газ будет очень медленно просачиваться слева направо. Вначале весь газ находится слева от перегородки при температуре  $T_1$ , а в опыте измеряется температура  $T_2$  газа в правой части сосуда. Изменение температуры в таком процессе ( $T_2 - T_1$ ) называется эффектом Джоуля–Томсона. При комнатной температуре для всех исследованных

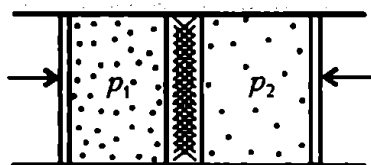


Рис. 2

газов был обнаружен отрицательный эффект Джоуля – Томсона, кроме водорода, для которого эффект был положительный. Однако во всех случаях при переходе к более разреженным газам эффект Джоуля – Томсона стремился к

нулю. В пределе, т.е. для сильно разреженных (идеальных) газов, эффект Джоуля – Томсона отсутствует:  $T_1 = T_2$ !

Легко убедиться, что из этого результата следует вывод о независимости внутренней энергии идеального газа от объема. Если начальный объем газа равен  $V_1$ , а конечный  $V_2$ , то работа газа в этом процессе равна  $A = -p_1V_1 + p_2V_2$ . Поскольку теплообмен в этом процессе отсутствует ( $Q = 0$ ), из первого закона термодинамики получаем

$$0 = U_2 - U_1 + p_2V_2 - p_1V_1.$$

Так как  $T_2 = T_1 = T$ , из уравнения состояния идеального газа следует

$$p_1V_1 = p_2V_2.$$

Значит,

$$U_2(V_2, T) = U_1(V_1, T).$$

Изучение процесса Джоуля – Томсона для реальных газов имеет большое значение – как научное, так и практическое. Оказалось, что для каждого газа существует так называемая температура инверсии, ниже которой эффект Джоуля – Томсона становится отрицательным. Процесс Джоуля – Томсона используется для получения низких температур.

### Идеальный газ в молекулярно-кинетической теории (МКТ)

С точки зрения МКТ, идеальным называется газ, в котором молекулы между соударениями не взаимодействуют друг с другом. Давление газа является результатом многочисленных ударов молекул о стенку. Если газ находится в тепловом равновесии со стенкой, эти соударения в среднем упругие. Исходя из этого, выводится основное уравнение МКТ идеальных газов

$$p = \frac{2}{3} n \langle \epsilon_{\text{пост}} \rangle \quad (5)$$

– давление газа пропорционально его концентрации и средней

кинетической энергии поступательного движения молекул. Умножим обе части уравнения (5) на объем газа:

$$pV = \frac{2}{3} N \langle \epsilon_{\text{пост}} \rangle = \frac{2}{3} E_{\text{пост}}.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением состояния (1), видим, что температура газа должна определяться средней кинетической энергией поступательного движения его молекул:

$$E_{\text{пост}} = \frac{3}{2} \nu RT. \quad (6)$$

Именно так определяется температура в молекулярно-кинетической теории — через среднюю кинетическую энергию поступательного движения в расчете на одну молекулу:

$$\langle \epsilon_{\text{пост}} \rangle = \frac{3}{2} kT \quad (7)$$

(здесь  $k = R/N_A$  — постоянная Больцмана).

**Справка.** Чтобы такое определение было законным, надо убедиться в том, что оно согласуется с основным свойством температуры: равенством температур двух тел, находящихся в тепловом равновесии. В МКТ строго доказывается, что если два газа находятся в тепловом равновесии друг с другом, то средние энергии поступательного движения молекул этих газов одинаковы. Это и позволяет дать энергетическое определение температуры идеального газа.

В случае одноатомного газа кинетическая энергия поступательного движения — это единственный вид внутренней энергии теплового движения (напомним, что потенциальная энергия взаимодействия между молекулами идеального газа считается пренебрежимо малой). Тогда для внутренней энергии газа из выражения (6) получаем

$$U = \frac{3}{2} \nu RT, \quad (8)$$

т.е. внутренняя энергия одноатомного газа, вычисленная в рамках МКТ, зависит только от температуры. Соответственно, теплоемкость одного моля одноатомного газа равна  $C_v = (3/2)R$ .

Обратим внимание на то, что в рамках МКТ и уравнение состояния идеального газа, и утверждение о независимости внутренней энергии от объема (для одноатомного газа) получаются при одном и том же предположении — пренебрежимой малости взаимодействия между молекулами. Это показывает,

что выражение для внутренней энергии, по-видимому, должно быть как-то связано с уравнением состояния.

**Справка.** В случае многоатомных газов надо учитывать кинетическую энергию не только поступательного, но и вращательного движения молекул, а в некоторых случаях и энергию колебаний атомов в молекуле относительно друг друга. Учесть эти виды энергии позволяет закон равнораспределения энергии по степеням свободы. Этот закон можно считать обобщением энергетического определения температуры (7). Он утверждает, что на каждую степень свободы молекулы приходится в среднем энергия  $(1/2)kT$  (в расчете на одну молекулу). Поступательному движению соответствует 3 степени свободы, и поэтому средняя энергия поступательного движения равна  $(3/2)kT$ . У двухатомных молекул есть еще две степени свободы, отвечающие вращательному движению, поэтому полная кинетическая энергия этих молекул равна  $(5/2)kT$ . Что касается колебательного движения атомов, то энергия этих движений оказывается пренебрежимо малой вплоть до температур 1000 – 2000 К. Объяснение такому «замораживанию» определенных движений дает квантовая механика.

### **Закон Джоуля и второй закон термодинамики**

Когда в середине прошлого века был сформулирован второй закон (начало, принцип) термодинамики, выяснилось, что он накладывает определенные ограничения на то, как может выглядеть внутренняя энергия  $U(V, T)$  для вещества с определенным уравнением состояния  $p(V, T)$ . В частности, для идеального газа с уравнением состояния (1) может быть строго доказан закон Джоуля.

Второй закон термодинамики накладывает также строгие ограничения на возможность превращения внутренней энергии хаотического теплового движения в механическую работу. В формулировке Томсона (лорда Кельвина) этот закон гласит: «Невозможен круговой процесс, единственным результатом которого было бы производство работы за счет охлаждения теплового резервуара». Простейшим следствием этого закона, имеющим аналитическую формулировку, является теорема Карно. Сформулируем ее следующим образом: КПД тепловой машины Карно любого типа, получающей тепло только от нагревателя с температурой  $T_1$  и отдающего тепло только холодильнику с температурой  $T_2$ , не может превышать КПД обратимой машины Карно, равного для машины любого типа

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (9)$$

Напомним, что Сади Карно, которого по праву считают осново-

положителем второго закона термодинамики, сформулировал свою знаменитую теорему в 1824 году, задолго до окончательного утверждения не только второго, но даже и первого закона термодинамики.

С помощью теоремы Карно можно получать различные физические следствия. Покажем, например, как можно доказать закон Джоуля, исходя только из уравнения Клапейрона–Менделеева.

Рассмотрим два состояния одного моля идеального газа, характеризующиеся одной и той же температурой  $T$ , но различными объемами  $V_1$  и  $V_2$  (рис.3). Вычислим разность внутренних энергий этих состояний  $\Delta U = U_2 - U_1$  и докажем, что она равна нулю. Для этого построим цикл Карно, минимальная температура которого на очень малую величину  $\Delta T$  отличается от максимальной температуры  $T$ . Работа, совершенная газом при изотермическом расширении, равна

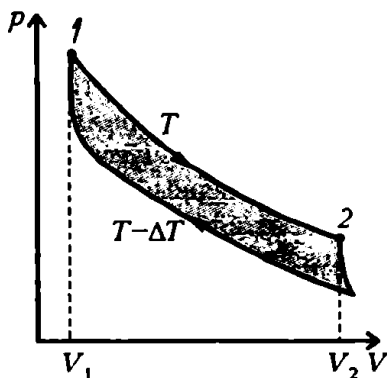


Рис. 3

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{RT}{V} dV = RT \ln \frac{V_2}{V_1},$$

а количество теплоты, полученное газом в этом процессе, равно

$$Q_1 = \Delta U + A = \Delta U + RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Работа  $\delta A$ , совершенная газом за цикл, равна площади внутри цикла. Для подсчета этой площади можно, учитывая близость двух изотерм (малость  $\Delta T$ ), заменить два наклонных адиабатических участка вертикальными прямыми. Получим

$$\delta A = RT \ln \frac{V_2}{V_1} - R(T - \Delta T) \ln \frac{V_2}{V_1} = R\Delta T \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Согласно теореме Карно, КПД этого цикла, равный  $\delta A/Q_1$ , должен быть равен  $\Delta T/T$ :

$$\frac{R\Delta T \ln \frac{V_2}{V_1}}{\Delta U + RT \ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{\Delta T}{T},$$



откуда немедленно следует, что  $\Delta U = 0$ . (Отметим, что такой же результат получился бы для любого уравнения состояния вида  $p = f(V)T$ .)

**Задание.** Попробуйте применить теорему Карно к газу Ван-дер-Ваальса — а именно, из уравнения состояния (3) получить выражение (4).

Возникает вопрос: зачем же было тратить такие большие экспериментальные усилия на проверку закона Джоуля, если его можно просто вывести? Не говоря о самостоятельной ценности этих экспериментов (особенно опытов Джоуля–Томсона), отметим следующее. Несомненно, Джоуль и Томсон прекрасно знали не только первый закон термодинамики (одним из создателей и обоснователей которого был Джоуль), но и второй (одним из основоположников которого был Томсон) — ведь они приступили к своим опытам уже после их открытия. Однако именно в этих условиях экспериментальное подтверждение закона Джоуля приобретало исключительное значение — должно было теперь служить одновременно проверкой и уравнения состояния идеального газа (незадолго до этого установленного Клапейроном), и самого второго закона термодинамики!

## ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ И НАПРЯЖЕННОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

*Д.Александров*

Напряженность поля, создаваемого неподвижным точечным зарядом, можно найти из закона Кулона. Получается

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}, \text{ или } E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Для нитечконого заряженного тела задача нахождения напряженности поля более сложная. Один из методов ее решения состоит в разбиении на точечные заряды и применении принципа суперпозиции, согласно которому поле нескольких зарядов равно векторной сумме полей каждого из них. В принципе, этот метод универсален. Он позволяет найти поле в любой ситуации, если известно расположение создающих его зарядов. Единственная проблема — вычислить получающуюся сумму. Разберем несколько практически важных примеров, когда это удастся сделать сравнительно просто.

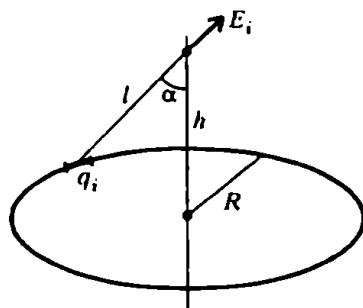


Рис. 1

Начнем с совсем простого примера — найдем поле равномерно заряженного кольца на его оси (рис.1).

Разобъем кольцо на маленькие кусочки и найдем поля  $i$ -го кусочка в интересующей нас точке:

$$E_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 l^2}.$$

---

Опубликовано в «Кванте» №5 за 1997 год.

Поле всего кольца равно

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i.$$

Модуль вектора  $\vec{E}$ , конечно, не равен сумме модулей отдельных слагаемых, поэтому сначала учтем симметрию задачи и избавимся от векторности суммы. Понятно, что перпендикулярные оси составляющие поля при суммировании сократятся, а параллельные просто сложатся, так что для модуля результирующего поля можно записать

$$E = \sum E_{i\parallel} = \sum \frac{q_i \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 l^2}.$$

В любой сумме одинаковые для всех слагаемых множители можно выносить за скобки. В нашем случае  $l$  и  $\alpha$  одинаковы для всех кусочков. Заряды  $q_i$  зависят от того, как мы разрезали кольцо, и в принципе могут быть произвольными (но достаточно малыми). Индекс « $i$ », таким образом, не только нумерует кусочки, но и подсказывает нам, что эту величину нельзя вынести за знак суммы. В результате суммирования получим

$$E = \frac{\cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 l^2} \sum q_i = \frac{Q \cos \alpha}{4\pi\epsilon_0 l^2} = \frac{Qh}{4\pi\epsilon_0 (h^2 + R^2)^{3/2}},$$

где  $Q$  — полный заряд кольца. В центре кольца поле равно нулю, а при  $h \gg R$  переходит, как и следовало ожидать, в поле точечного заряда.

Как видно, в данном случае сумма выродилась в тривиальное сложение зарядов отдельных кусочков. Если, однако, зарядить кольцо неравномерно или сдвинуть в сторону точку наблюдения, задача станет несравненно сложнее.

Теперь перейдем к полю бесконечной равномерно заряженной нити (рис.2).

Обозначим линейную плотность заряда нити через  $\lambda$ , а расстояние от точки наблюдения до нити — через  $r$ . Разобьем нить на маленькие кусочки и запишем принцип суперпозиции:

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i,$$

где

$$E_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 l_i^2}, \quad q_i = \lambda \Delta x_i, \quad l_i^2 = r^2 + x_i^2.$$

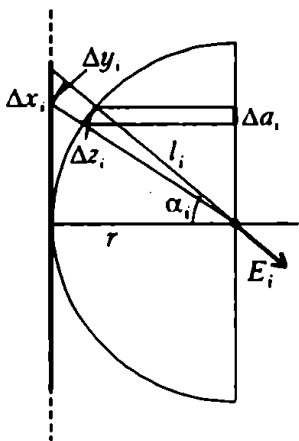


Рис. 2

В этом случае при суммировании сократятся параллельные нити составляющие поля, и для модуля результирующего поля получим

$$E = \sum E_{i\perp} = \sum E_i \cos \alpha_i = \sum \frac{\lambda \Delta x_i}{4\pi\epsilon_0 l_i^2} \cos \alpha_i.$$

Такая сумма пугает обилием индексов « $i$ », и за знак суммы можно вынести только  $\lambda$  и  $4\pi\epsilon_0$ . Однако расчет можно упростить, придав геометрический смысл оставшемуся выражению. Для этого проведем касающуюся нити окружность с центром в точке наблюдения. Тогда  $\Delta y_i = \Delta x_i \cos \alpha_i$  (обозначения ясны из рисунка 2),  $\Delta z_i = \Delta y_i r / l_i$ ,  $r / l_i = \cos \alpha_i$  и

$$\begin{aligned} E &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sum \frac{r \Delta y_i}{l_i} \frac{r}{l_i} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sum \Delta z_i \cos \alpha_i = \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sum \Delta a_i = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r^2} 2r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}. \end{aligned}$$

Аналогично можно справиться с суммой, возникающей при вычислении поля равномерно заряженной плоскости.

Разрежем плоскость на тонкие параллельные полоски. Поле такой полоски мы только что вычислили. Если поверхностная плотность заряда на плоскости  $\sigma$ , а ширина полоски  $\Delta x$ , то заряд единицы длины полоски равен  $\lambda = \sigma \Delta x$ , и поле, создаваемое  $i$ -й полоской в точке наблюдения, равно

$$E_i = \frac{\sigma \Delta x_i}{2\pi\epsilon_0 l_i}.$$

Согласно принципу суперпозиции (обозначения см. на рисунке 2),

$$E = \sum E_i \cos \alpha_i = \sum \frac{\sigma \Delta x_i \cos \alpha_i}{2\pi\epsilon_0 l_i}.$$

Поскольку (аналогично предыдущему)  $\Delta y_i = \Delta x_i \cos \alpha_i$  и  $\Delta z_i = \Delta y_i r / l_i$ , получаем

$$\begin{aligned} E &= \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \sum \frac{\Delta x_i \cos \alpha_i}{l_i} = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \sum \frac{\Delta y_i}{l_i} = \\ &= \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0 r} \sum \frac{\Delta y_i r}{l_i} = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0 r} \sum \Delta z_i = \frac{\sigma \pi r}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \end{aligned}$$

## Упражнения

1. Найдите поле плоскости, разбивая ее не на полоски, а на кольца и используя результат задачи о поле кольца.

2. Найдите поле плоскости, разбивая ее на точечные заряды (вместо полуокружности придется взять полусферу).

Чтобы справиться с задачей нахождения поля заряженной сферы, понадобится немного геометрии.

Рассмотрим окружность с центром  $O$  и радиусом  $R$  и какую-нибудь точку  $A$  вне ее (рис. 3). Точку

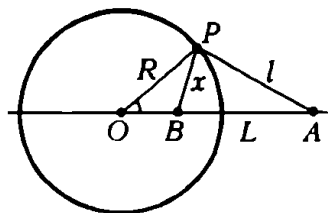


Рис. 3

Точку  $B$  на луче  $OA$ , для которой  $OA \cdot OB = R^2$ , назовем сопряженной с точкой  $A$ . Она обладает многими замечательными свойствами. Для нас важно следующее:  $OB/OP = OP/OA$ . Треугольники  $POB$  и  $POA$ , кроме пропорциональных сторон, имеют еще общий угол, поэтому они подобны. Обозначив  $OA = L$ ,  $BP = x$ ,  $PA = l$  и  $OP = R$ , имеем  $R/L = x/l$ . Из подобия также следует, что  $\angle OPB = \angle PAO$ .

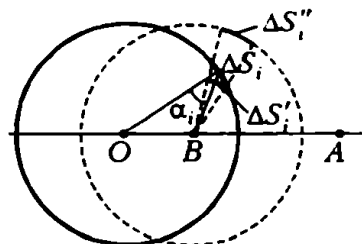


Рис. 4

Теперь займемся собственно полем сферы. Если  $A$  — точка наблюдения, а  $\sigma$  — плотность заряда на сфере, то в обозначениях на рисунках 3 и 4 имеем

$$E = \sum \frac{\sigma \Delta S_i}{4\pi\epsilon_0 l_i^2} \cos \alpha_i.$$

Построим сферу того же радиуса с центром в точке  $B$ , сопряженной с  $A$  (см. рис. 4), и найдем площадь  $\Delta S_i''$ , которую закрывает на ней площадка  $\Delta S_i'$ , если смотреть из точки  $B$ :

$$\Delta S_i'' = \left(\frac{R}{x}\right)^2 \Delta S_i' = \frac{R^2 \Delta S_i' \cos \alpha}{x^2}.$$

Теперь, вспомнив что  $x/R = l/L$ , получим  $\Delta S_i'' = \frac{\Delta S_i' \cos \alpha_i}{l_i^2} L^2$  и найдем нужную нам сумму:

$$E = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{\Delta S_i' \cos \alpha_i}{l_i^2} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0 L^2} \sum \Delta S_i'' = \frac{\sigma \cdot 4\pi R^2}{4\pi\epsilon_0 L^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L^2}.$$

**Упражнение 3.** Покажите, что внутри сферы поля нет.

# ПОЛЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ПЛОСКОСТИ

Д.Александров

Какое поле создает равномерно заряженная плоскость? Ясно, что вблизи — однородное, а очень далеко — похожее на поле точечного заряда. Например, для поля на оси равномерно заряженного плоского диска радиусом  $R$  зависимость  $E_a(h)$  можно ожидать примерно такую, как показано на рисунке 1. А какое поле будет тогда снаружи плоского конденсатора, т.е. системы двух стоящих рядом пластин (дисков), равномерно заряженных одинаковыми по величине и противоположными по знаку зарядами?

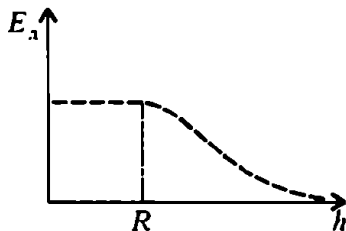


Рис. 1

Чтобы найти  $E_k(h)$ , нужно, в соответствии с принципом суперпозиции, сложить поля двух пластин. Так, поле на расстоянии  $h$  от ближней пластины равно разности (так как заряды пластин разных знаков) полей  $E(h)$  и  $E(h + d)$ , где  $d$  — расстояние между пластинами. Если  $d \ll R$ , как это обычно и бывает у плоского конденсатора, разность можно заменить производной:

$$E_k(h) = E(h + d) - E(h) = E'(h) \cdot d.$$

График зависимости  $E_k(h)$  приведен на рисунке 2.

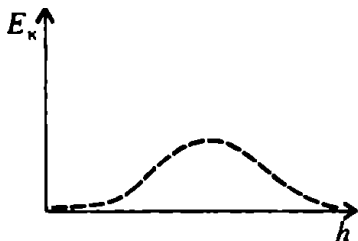


Рис. 2

Поле конденсатора максимально там, где поле одной пластины меняется наиболее быстро. Но, с другой стороны, силовые линии поля снаружи конденсатора выходят перпендикулярно пластинам и далее могут только расходиться (рис.3). Поэтому напряженность должна монотонно убывать и не может иметь максимума.

---

Опубликовано в «Кванте» №3 за 1998 год.

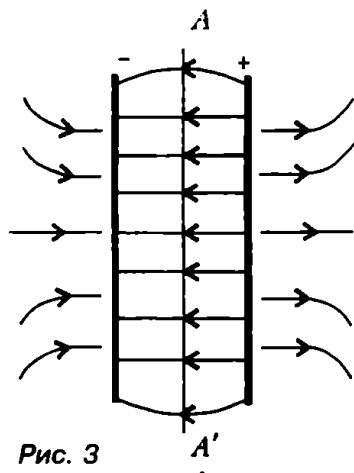


Рис. 3

Полученное противоречие заставляет более аккуратно рассмотреть поле, создаваемое равномерно заряженной плоскостью. Лучше всего его честно посчитать.

Возьмем равномерно заряженный диск радиусом  $R$  и найдем поле на его оси, воспользовавшись принципом суперпозиции. Маленький кусочек диска площадью  $\Delta S$  имеет заряд  $\sigma\Delta S$  и создает в точке наблюдения поле  $\Delta E = k\sigma\Delta S/l^2$  (рис.4). Ясно, что в окончательный результат дает вклад только перпендикулярная составляющая поля, поэтому

будем учитывать только ее:

$$\Delta E_{\perp} = \Delta E \cos \alpha = \frac{k\sigma\Delta S \cos \alpha}{l^2}.$$

Если вы знаете, что такое телесный угол, то заметите, что  $(\Delta S \cos \alpha)/l^2$  как раз равно телесному углу, под которым виден кусочек  $\Delta S$  из точки наблюдения; следовательно, суммарное поле

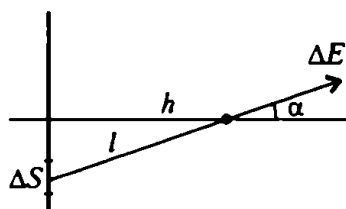


Рис. 4

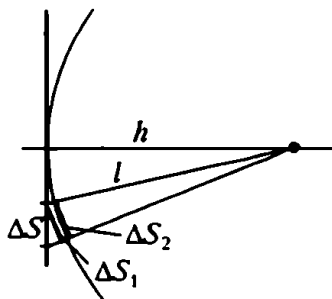


Рис. 5

равно телесному углу, под которым виден весь диск, умноженному на  $k\sigma$ .

Для тех, кто не знаком с телесным углом, сделаем следующее. Проведем сферу с центром в точке наблюдения и касающуюся диска (рис.5). Тогда поле  $\Delta E_{\perp}$  можно выразить следующим образом:

$$\Delta E_{\perp} = \frac{k\sigma\Delta S \cos \alpha}{l^2} = k\sigma \frac{\Delta S_1}{l^2} = k\sigma \frac{\Delta S_2}{h^2},$$

где

$$\Delta S_1 = \Delta S \cos \alpha \text{ и } \Delta S_2 = \Delta S_1 \frac{h^2}{l^2}.$$

Просуммировав по всем кусочкам, получим, что полное поле равно  $k\sigma S/h^2$ , где  $S$  — площадь, вырезаемая из нашей сферы конусом с вершиной в точке наблюдения и диском в качестве основания. Найдите самостоятельно эту площадь и убедитесь, что

$$S = 2\pi h^2(1 - \cos\alpha) = 2\pi h^2 \left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}}\right),$$

а значит,

$$E = 2\pi k\sigma \left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}}\right).$$

Проверьте также, что при  $h \gg R$  эта формула переходит в такую:

$$E = k \frac{\pi R^2 \sigma}{h^2}.$$

Из графика на рисунке 6, где изображена последняя зависимость  $E(h)$ , видно, что поле вблизи пластины меняется быстрее всего, т.е. в каком-то смысле оказывается наиболее неоднородным.



Рис. 6

Теперь нетрудно найти и поле конденсатора. Будем считать, что  $d \ll R$ . Тогда

$$E_{\kappa} = E(h) - E(h + d) = -E'(h) \cdot d = \frac{2\pi k\sigma R^2 d}{(h^2 + R^2)^{3/2}}.$$

При  $h \ll R$

$$E_{\kappa} = 2\pi k\sigma \frac{d}{R} = E_{\text{внутри}} \frac{d}{2R}, \quad (*)$$

т.е. поле действительно мало.

Раз на внешних сторонах пластин начинаются и заканчиваются силовые линии, там должны быть заряды. Формула (\*) позволяет найти связь между поверхностными плотностями заряда на внутренней и внешней сторонах пластины:

$$\sigma_{\text{снаружи}} = \sigma_{\text{внутри}} \frac{d}{2R}.$$

Отсюда также следует, что реальная емкость плоского конденсатора больше, чем даст пренебрегающая краевыми эффектами формула  $C = S/(4\pi k d)$ , так как эффективная площадь пластин больше  $S$  из-за того, что у них работают еще и внешние стороны.



Теперь поговорим о потенциале. Если, скажем, конденсатор заряжен до разности потенциалов  $U$ , то чему равны потенциалы пластин относительно бесконечности? При обсуждении подобных вопросов полезен следующий факт: у симметричного конденсатора (пластины одинаковой формы, стоящие параллельно) потенциал точки посередине между пластинами равен потенциалу бесконечности. В этом можно убедиться, посмотрев на картину силовых линий поля конденсатора (см. рис.3). Из симметрии очевидно, что уходящая в бесконечность плоскость  $AA'$  всюду перпендикулярна силовым линиям и поэтому является эквипотенциальной поверхностью. (Предполагается, что кроме конденсатора никаких зарядов во вселенной нет.) Потенциалы пластин относительно бесконечности совпадают, таким образом, с потенциалами пластин относительно середины конденсатора, т.е. они равны  $\pm U/2$ .

Если от внешней стороны отрицательной пластины заряженного до напряжения  $U$  конденсатора отрывается электрон, то его скорость в бесконечности можно найти из уравнения

$$\frac{mv^2}{2} = e \frac{U}{2}$$

(начальной скоростью электрона пренебрегаем). Эта простая задача дает пример ситуации, когда принципиально нельзя пренебречь краевыми эффектами.

В заключение заметим, что поле снаружи и заряд на внешней стороне обкладок — неприятности не только плоского конденсатора. Легко показать, что любой заряженный конденсатор создает вокруг себя поле и, следовательно, имеет заряды на внешних сторонах обкладок, так как силовым линиям нужно где-то начинаться и заканчиваться. В самом деле, работа электростатического поля при переносе заряда с одной клеммы на другую не зависит от маршрута. Переноса заряд как вне конденсатора, так и внутри его, мы получим одинаковые работы. Поэтому, если поле есть внутри конденсатора, то оно есть и снаружи. Можно, конечно, попытаться «запереть» поле, например между двумя сферами. Но чтобы эта система стала конденсатором, нужно иметь возможность подключаться к внутренней сфере. Придется сверлить дырочку, через которую поле и заряд вырвутся наружу. Так что ничего хорошего у нас не получится.

*А. Черноуцан*

Если спросить у школьника (даже весьма подготовленного), что произойдет, если на тонкую металлическую пластину площадью  $S$  поместить заряд  $q$ , то почти наверняка можно услышать такой ответ: «Заряд распределится по пластине почти равномерно, кроме самых краев; непосредственно у поверхности напряженность поля будет направлена перпендикулярно пластине и равна  $E = q/(2\epsilon_0 S)$ ». Откуда берется такой ответ, понятно: школьник воспринимает изолированную пластину как половину хорошо известного ему плоского конденсатора. Но такое представление ошибочно. Равномерное распределение заряда по пластинам плоского конденсатора возникает в результате взаимного влияния этих заряженных пластин, и для изолированной пластины распределение заряда по поверхности может заметно отличаться от равномерного. Это распределение сильно зависит от формы пластины, и в общем случае может быть получено только на компьютере. Однако для пластины круглой формы — металлического диска — результат можно получить точно. Сделаем это, но прежде вспомним основные свойства электростатического поля в присутствии проводников.

**Теорема единственности.** Основные свойства проводников сводятся к следующим:

- 1) Напряженность поля внутри проводника равна нулю.
- 2) Все точки проводника (любого!) обладают одним и тем же потенциалом — его называют потенциалом проводника. В случае изолированного проводника этот потенциал пропорционален заряду:  $q = C\phi$  ( $C$  — емкость изолированного проводника).
- 3) Заряд проводника расположен только на его поверхности (в объеме проводника заряд отсутствует).
- 4) Вблизи проводника напряженность поля направлена перпендикулярно его поверхности.

Если распределение заряда по поверхности проводника зара-

нее неизвестно, то угадать его (кроме самых простых случаев) довольно сложно. Существенную помощь при решении задач оказывает теорема единственности: существует единственное распределение зарядов, удовлетворяющее перечисленным свойствам. Значит, если удалось угадать какое-нибудь распределение заряда, при котором поле внутри проводника отсутствует, то это распределение и будет правильным. На этом принципе основан, в частности, известный метод электростатических изображений (см., например, следующую статью). Единственность окажет помощь и в нашем случае.

**Тонкий диск.** Рассмотрим тонкий проводящий диск радиусом  $R$ , на котором находится заряд  $q$ . Так как объем диска близок к нулю, надо следить за полем не в объеме диска, а возле его поверхности. А именно, нужно найти такое распределение заряда по поверхности, при котором напряженность поля возле любой точки диска направлена перпендикулярно его поверхности. Чтобы сделать это, поступим следующим образом.

Возьмем проводящую сферу радиусом  $R$  и поместим на нее заряд  $q$ . Ясно, что этот заряд распределится по поверхности равномерно с поверхностной плотностью  $\sigma_0 = q/(4\pi R^2)$ . Напря-

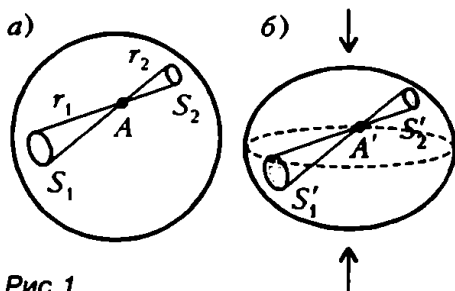


Рис. 1

женность поля внутри сферы будет при этом равна нулю. Хотя это утверждение можно считать очевидным (скажем, из соображений единственности), полезно вспомнить, как оно доказывается с помощью принципа суперпозиции. Рассмотрим внутри сферы произвольную точку  $A$ , и построим тонкий конус с вершиной в этой точке (рис. 1, а). Этот конус отсекает от сферы две маленькие площадки. Из подобия следует, что отношение их площадей равно отношению квадратов расстояний:  $S_1/S_2 = r_1^2/r_2^2$ . Следовательно, напряженности полей, создаваемые в точке  $A$  этими площадками, равны по величине ( $k\sigma_0 S_1/r_1^2 = k\sigma_0 S_2/r_2^2$ ) и, поскольку направления слагаемых напряженностей противоположны, результирующая напряженность равна нулю.

Начнем деформировать сферу, сжимая ее вдоль одного из направлений (рис. 1, б). Но не позволим зарядам растекаться по поверхности получившейся «лепешки» (по-научному — эллипсоида), выбирая известное им единственно правильное распреде-

ление, а будем считать их как бы приклеенными к поверхности. Это значит, что заряд, находившийся на некоторой площадке, после ее деформации останется таким же. При этом для каждой степени сжатия мы можем рассчитать распределение заряда по поверхности получившегося эллипсоида. Рецепт следующий: вычислим, во сколько раз уменьшится площадь маленького кусочка поверхности — во столько же раз увеличится поверхностная плотность заряда. Например, при линейном сжатии в 2 раза поверхностная плотность заряда на полюсах останется равной  $\sigma_0$ , а на экваторе увеличится до  $2\sigma_0$ .

Самое замечательное, что принудительно построенное нами распределение заряда как раз и является правильным! Действительно, в результате сжатия деформированные конусы останутся подобными, и создаваемая площадками  $S'_1$  и  $S'_2$  в точке  $A'$  напряженность останется равной нулю. Значит, угаданное нами распределение заряда дает внутри эллипсоида нулевую напряженность, а снаружи вблизи эллипсоида напряженность перпендикулярна его поверхности.

Наверное, вы уже догадались, как теперь перейти к бесконечно тонкому проводящему диску — надо просто устремить к бесконечности степень сжатия! При этом круглая полоска шириной  $\Delta r$  на поверхности

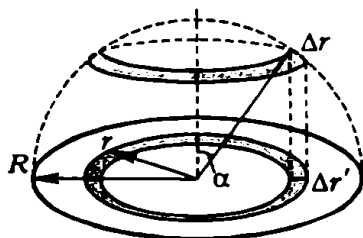


Рис. 2

сферы перейдет в полоску шириной  $\Delta r' = \Delta r \cos \alpha$  на диске, т.е. площадь полоски уменьшится в  $1/\cos \alpha$  раз (рис.2). Значит, на расстоянии  $r$  от центра диска поверхностная плотность заряда (с одной стороны диска) будет равна

$$\sigma(r) = \frac{\sigma_0}{\cos \alpha} = \frac{\sigma_0 R}{\sqrt{R^2 - r^2}}. \quad (*)$$

Видно, что распределение заряда совсем не похоже на равномерное. Поверхностная плотность заряда при удалении от центра возрастает, а при приближении к краю диска стремится к бесконечности. Отметим, что поверхностная плотность заряда в центре диска  $\sigma_0 = q/(4\pi R^2)$  в два раза меньше, чем была бы при равномерном распределении заряда ( $\sigma = q/(2\pi R^2)$ ). В два раза меньше будет и напряженность поля возле центра диска.

**Емкость тонкого диска радиусом  $R$ .** Используя полученное нами распределение заряда по поверхности диска, мы можем найти его емкость. Для чего это нужно? Ну например, зная

емкость, можно определить энергию электрического поля, создаваемого заряженным диском, что часто бывает полезно для решения задач.

Чтобы вычислить электроемкость, надо найти потенциал диска. Проще всего это сделать для центра диска. Разбивая диск на тонкие круглые полоски, получим

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{2\sigma(r)dS}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{2\sigma_0 R \cdot 2\pi r dr}{r\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{\pi\sigma_0 R}{2\epsilon_0}$$

(такой интеграл можно найти в таблице или взять самостоятельно, сделав замену  $r = R \sin \alpha$ ). Учитывая, что  $q = \sigma_0 \cdot 4\pi R^2$ , найдем емкость диска по формуле  $C = q/\varphi$ :

$$C = 8\epsilon_0 R.$$

**Упражнение.** Какую работу надо совершить, чтобы две круглые обкладки плоского конденсатора разнести на очень большое расстояние друг от друга? Начальное расстояние  $d$  между пластинами много меньше

их радиуса  $R$ , заряд конденсатора  $q$ . **Ответ:**  $A = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \left(1 - \frac{4d}{\pi R}\right)$ .

**Две одинаково заряженные плоские пластины.** Рассмотрим плоский конденсатор с круглыми пластинами, расстояние между которыми  $d$  много меньше их радиуса  $R$ . Что произойдет, если зарядить эти пластины одинаковыми по величине и знаку зарядами? Ответ следующий: практически весь заряд каждой пластины окажется распределен по ее внешней стороне по закону, определяемому формулой (\*). Заряд на внутренней стороне и поле между пластинами будут ничтожно малыми. Объяснить такой результат проще всего с помощью теоремы единственности. Возьмем сначала пластину радиусом  $R$  с малой толщиной  $d$  и нанесем на нее двойной заряд. Он распределится по ее поверхностям по закону, близкому к случаю бесконечно тонкой пластины. Теперь вырежем внутреннюю часть. Так как она почти не заряжена, распределение заряда практически не изменится. Значит, в этом случае взаимодействие между пластинами сводится к выталкиванию зарядов на внешние стороны пластин.

**Плоский конденсатор.** Теперь зарядим эти же пластины «как положено» — зарядами, одинаковыми по величине, но противоположными по знаку. Ситуация кардинально изменится. Почти весь заряд окажется на внутренней стороне пластин, причем распределится практически равномерно. Все дело в том, что в этом случае в пространстве между пластинами существует элек-

трическое поле. Напряженность поля  $\vec{E}$  направлена перпендикулярно пластинам, и разность потенциалов  $U$  между пластинами постоянна и в любом месте равна  $U = Ed$ . А поскольку расстояние между пластинами всюду одно и то же, то и напряженность поля, и поверхностная плотность заряда также почти всюду одинаковы (кроме краев). Перпендикулярность поля поверхности пластин теперь обеспечивается автоматически — за счет суперпозиции напряженностей от положительной и отрицательной пластин (рис.3) — и не требует специального распределения по поверхности, как в случае изолированной пластины. Таким образом взаимодействие между пластинами привело к кардинальному перераспределению заряда.

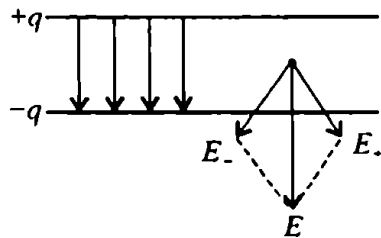


Рис. 3

Как видно из приведенных рассуждений, равномерное распределение заряда по поверхности обеспечивается постоянным расстоянием между пластинами. Если бы расстояние между пластинами медленно менялось, то в более узком месте и напряженность поля, и поверхностная плотность заряда были бы больше.

**Произвольно заряженные пластины.** К разобранным нами двум случаям — пластины, заряженные одноименными или разноименными зарядами — можно свести и общий случай произвольно заряженных пластин. Действительно, пусть на одну пластину нанесли заряд  $q_1$ , а на другую — заряд  $q_2$ . Тогда общий заряд пластин равен  $Q = q_1 + q_2$ . Будем считать, что пластины заряжали в два этапа: сначала на них поместили одноименные заряды  $Q/2$ , а потом на первую пластину поместили заряд  $q = (q_1 - q_2)/2$ , а на вторую — заряд  $-q$ . Тогда поле в пространстве между пластинами и разность потенциалов между ними будут определяться зарядом  $q$ , равномерно распределенным по внутренней поверхности, а поле вне пластин — зарядом  $Q$ , неравномерно распределенным по внешней поверхности (в случае круглых пластин это распределение описывается формулой (\*)).

А. Черноуцан

Определение поля в пространстве вокруг проводников представляет собой трудную задачу. Достаточно редко удастся решить ее простыми методами, без привлечения сложной математики или мощного компьютера. Причина состоит в том, что заранее не известно распределение зарядов по поверхности проводника. Известно лишь, что они занимают такое (единственное!) положение, при котором напряженность поля внутри проводника равна нулю. Значит, нельзя сразу же применять привычный метод суперпозиции, что создает психологические трудности. Неудивительно, что в школе ограничиваются рассмотрением одной задачи — об уединенном проводящем шаре, — в которой распределение заряда является очевидным.

В этой статье мы продемонстрируем, как соображения симметрии позволяют в некоторых случаях «угадать», или, точнее, «сконструировать» решение. Мы рассмотрим только один тип задач — проводник в поле точечного заряда  $+q$ .

Заряды на проводнике перераспределяются так, чтобы скомпенсировать напряженность поля точечного заряда внутри проводника. Поле этих наведенных зарядов есть и вне проводника, в частности оно действует на заряд  $+q$  с силой  $\vec{F} = q \vec{E}_{\text{нав}}$ .

Чтобы задача была определена, необходимо, как говорят математики, задать граничные условия. Возможны следующие случаи:

1) Известен заряд проводника  $Q$ . Например, если  $Q = 0$ , то на ближайшей к заряду  $+q$  поверхности проводника будут распределены отрицательные наведенные заряды, а на дальней — положительные (рис 1, а). Видно,

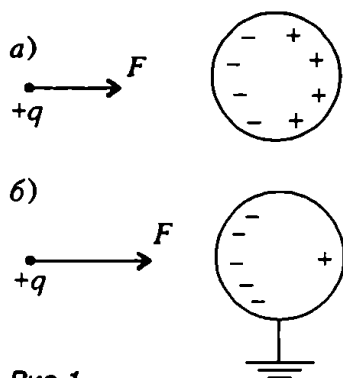


Рис. 1

Опубликовано в «Кванте» №1 за 1996 год.

что заряд и незаряженный проводник (на рисунке — шар) притягиваются друг к другу.

2) Известен потенциал проводника. Предполагается, что он соединен проволокой с удаленным большим проводником известного потенциала. Например, при соединении с землей (заземлении) принимается, что потенциал равен нулю (как на бесконечности). На заземленном проводнике появляется отрицательный наведенный заряд, и он притягивает заряд  $q$  сильнее, чем незаряженный (рис 1,б).

Самая простая форма проводника — сферическая. Мы постараемся к концу статьи полностью решить задачу о проводящем шаре в поле точечного заряда. «Полностью решить» — значит научиться вычислять напряженность поля во всем пространстве, силу взаимодействия заряда и проводника, а также величину наведенного заряда и его распределение по поверхности проводника.

Интересно, что на некоторые вопросы можно ответить довольно легко. Определим, например, какой заряд появится на заземленном шаре, если точечный заряд  $q$  находится на расстоянии  $L$  от его центра. Для этого воспользуемся тем, что потенциал центра шара (как и всех его точек) равен нулю. Выразим его через заряды:

$$k \frac{q}{L} + \sum_i k \frac{\Delta Q_i}{R} = k \frac{q}{L} + k \frac{Q_{\text{нав}}}{R} = 0$$

(потенциал, создаваемый наведенными зарядами в центре шара, не зависит от их распределения, так как все они находятся на расстоянии  $R$  от центра). Получаем

$$Q_{\text{нав}} = -q \frac{R}{L}. \quad (1)$$

Но как действовать дальше? Чтобы понять, какой вид может иметь решение, рассмотрим сначала совсем другой проводник — бесконечную плоскость (или, что то же самое, полупространство). Совершенно неожиданно соображения симметрии позволят нам полностью решить эту задачу и подскажут, как можно подойти к задаче о заряде и шаре.

Пусть проводник занимает все правое полупро-

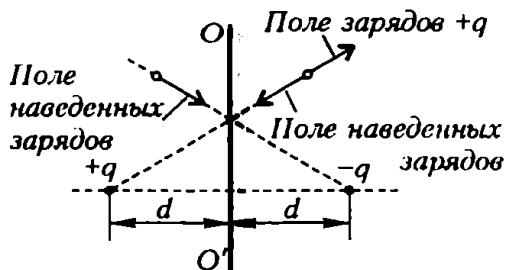


Рис. 2



странство (рис.2). Вычислить поле вне проводника (слева от  $OO'$ ) нам поможет тот очевидный факт, что поле наведенных зарядов симметрично относительно плоскости  $OO'$ . Раз это поле в проводнике компенсирует поле заряда  $+q$ , то оно совпадает с полем воображаемого заряда  $-q$ , помещенного в ту же точку, что и заряд  $+q$ . Теперь ясно, что поле, которое создают наведенные заряды слева от  $OO'$  (вне проводника), в точности равно полю воображаемого заряда  $-q$ , но помещенного по другую сторону от плоскости  $OO'$  симметрично по отношению к заряду  $+q$ . Этот воображаемый заряд  $-q$  называют изображением заряда  $+q$ .

Итак, плоская поверхность проводника притягивает точечный заряд  $+q$ , удаленный от нее на расстояние  $d$ , с такой же силой, с какой его притягивал бы заряд  $-q$ , удаленный на расстояние  $2d$ :

$$F = k \frac{q^2}{(2d)^2}.$$

Мы получили удивительный результат: поле, создаваемое зарядом и проводником (рис.3,а), в пространстве вне проводни-

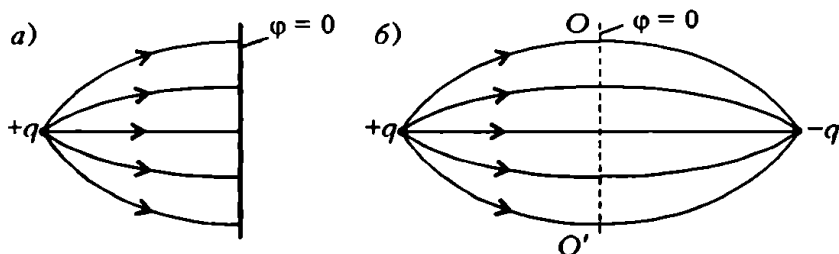


Рис. 3

ка совпадает с полем всего двух точечных зарядов (рис.3,б). Почему оказалась возможной такая подмена? Вспомним, что поверхность проводника представляет собой эквипотенциальную поверхность, причем в нашем примере потенциал проводника равен нулю. Поле же двух зарядов  $+q$  и  $-q$  обладает следующим свойством: эквипотенциальная поверхность  $\varphi = 0$  совпадает с плоскостью симметрии  $OO'$ , т.е. точно повторяет форму поверхности рассматриваемого проводника. Именно в этом причина совпадения полей, изображенных на рисунке 3.

В других случаях тоже надо стремиться расположить заряды-изображения внутри проводника так, чтобы поверхность нужного постоянного потенциала совпадала с поверхностью проводника. Тогда поле внешних зарядов и проводника будет совпадать

с полем внешних зарядов и зарядов-изображений (т.е. проводник подменяется изображениями). Дело в том, что граница рассматриваемой области (пространства вне проводника) имеет в этих случаях одинаковый потенциал, и расположение зарядов внутри области также одно и то же (все изображения находятся в проводнике, т.е. вне этой области). Выполнения этих условий достаточно, чтобы утверждать, что поля совпадают всюду внутри области. Это утверждение часто называют принципом единственности в электростатике.

Возникает резонный вопрос — как это сделать? Как найти заряды-изображения и их положения, если известны форма и потенциал проводника? К сожалению, в общем случае такого рецепта не существует, и обычно приходится действовать, как говорят, «с конца» — от зарядов к проводнику. Возьмем несколько точечных зарядов, рассчитаем их поле, найдем любую эквипотенциальную поверхность  $\varphi = \varphi_0$  и заполним пространство внутри этой поверхности проводником с потенциалом  $\varphi_0$ . Тогда поле, которое мы уже рассчитали, представляет собой готовое решение для получившегося проводника и тех зарядов, что оказались вне его. Заряды же, которые «погибли» внутри проводника, играют роль зарядов-изображений.

Таким способом можно построить много «готовых» решений (правда нет гарантии, что всегда удастся подобрать решение под заранее выбранный проводник). Вот пример. Рассмотрим какую-нибудь эквипотенциальную поверхность для тех же зарядов  $+q$  и  $-q$ , например с  $\varphi = -1$  В (рис. 4,а). Поле зарядов вне этой поверхности совпадает с полем заряда  $+q$  и проводника, имеющего фиксированный потенциал  $\varphi = -1$  В (рис. 4,б).

Еще пример. Поле четырех зарядов  $+q$ ,  $+q$ ,  $-q$  и  $-q$ , размещенных в вершинах прямоугольника (рис. 5,а), имеет эквипотенциальную поверхность  $\varphi = 0$  в виде двух взаимно перпендикулярных плоскостей. Значит, часть этого поля, заключенная в первом квадранте, совпадает с полем заряда  $+q$ , помещенного в двугранный угол (рис.5,б). Три других заряда являются изображениями заряда  $+q$ . Попробуйте сами найти

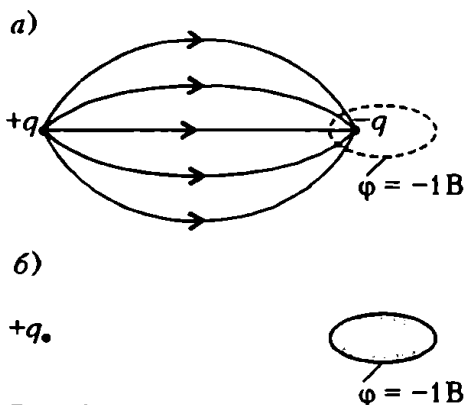


Рис. 4

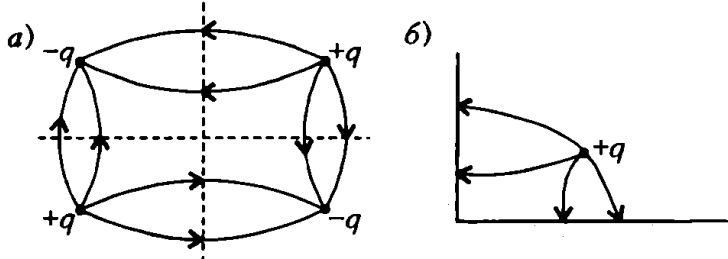


Рис. 5

решение для заряда, помещенного в трехгранный угол (для этого вам придется использовать семь дополнительных зарядов).

Вернемся к проводящему шару. Возьмем два заряда  $+q_1$  и  $-q_2$  ( $q_1 > q_2$ ), расположенных на расстоянии  $l$  друг от друга (рис. 6, а). Оказывается, что эквипотенциальная поверхность  $\varphi = 0$  представляет собой сферу. Чтобы определить радиус этой сферы

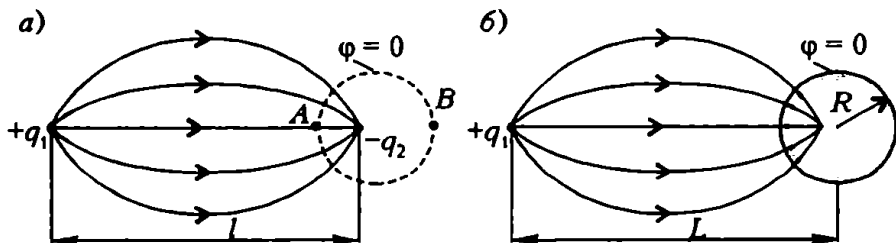


Рис. 6

$R$  и расстояние  $L$  от ее центра до заряда  $+q_1$ , можно приравнять к нулю потенциалы точек  $A$  и  $B$ :

$$k \frac{q_1}{L - R} - k \frac{q_2}{R - (L - l)} = 0, \quad k \frac{q_1}{L + R} - k \frac{q_2}{R + (L - l)} = 0.$$

Поле данных двух зарядов в пространстве вне сферы в точности совпадает с полем, которое возникает, если заряд  $+q_1$  поместить на расстоянии  $L$  от центра заземленного проводящего шара радиусом  $R$  (рис. 6, б). В том случае, когда задано положение шара, нам известны  $R$  и  $L$ , а положение ( $l$ ) отрицательного заряда-изображения и его величину ( $q_2$ ) можно найти:

$$l = L - \frac{R^2}{L}, \quad q_2 = \frac{q_1 R}{L} \quad (2)$$

(расстояние от  $q_2$  до центра равно  $R^2/L$ ). Сравните ответ для заряда  $q_2$  с полученным ранее ответом (1) для заряда на заземленном шаре. Сила, с которой заряд  $+q_1$  притягивается к

шару, равна

$$F = k \frac{q_1 q_2}{l^2}.$$

А как быть в случае, если задан заряд шара  $Q$ ? Оказывается, решение этой задачи легко получить из задачи о заземленном шаре. Сконструируем ответ следующим образом. Рассмотрим заземленный шар в поле заряда  $q_1$ , отсоединим шар от земли и, не позволяя зарядам смещаться, распределим равномерно по поверхности шара дополнительный заряд  $q_3 = Q + q_2$ . Так как до этого на шаре был заряд  $-q_2$ , то полный заряд шара станет равен  $Q$ . При этом напряженность поля внутри шара останется равной нулю. Значит, в соответствии с принципом единственности, мы нашли правильное решение. Поле наведенных зарядов вне шара будет совпадать с полем двух точечных зарядов:  $-q_2$  на расстоянии  $R^2/L$  от центра шара и  $q_3$  в центре шара. Например, в случае незаряженного шара ( $Q = 0$ ) получаем  $q_3 = q_2$ , и сила притяжения между точечным зарядом  $q_1$  и незаряженным проводящим шаром оказывается равной

$$F = k \frac{q_1 q_2}{l^2} - k \frac{q_1 q_2}{L^2},$$

где  $L$  — расстояние от заряда  $q_1$  до центра шара, а  $l$  и  $q_2$  определяются формулами (2).

Осталось ответить на один вопрос: как найти распределение зарядов по поверхности проводника? Для этого надо рассчитать напряженность поля  $\vec{E}$  возле той точки поверхности, которая нас интересует (напомним, что  $\vec{E}$  перпендикулярна к поверхности), и воспользоваться формулой, связывающей напряженность с поверхностной плотностью заряда (см. Приложение):

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (3)$$

Например, в случае проводящей плоскости поле равно векторной сумме полей заряда  $q$  и заряда-изображения  $-q$ . На расстоянии  $x$  от основания перпендикуляра, опущенного из заряда на плоскость (рис. 7), напряженность равна

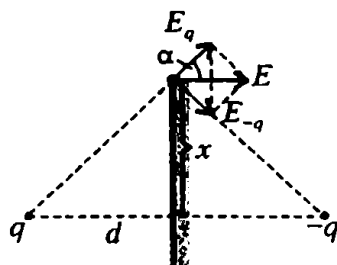


Рис. 7

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{x^2 + d^2} \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qd}{(x^2 + d^2)^{3/2}},$$

откуда находим

$$\sigma(x) = \frac{2qd}{4\pi(x^2 + d^2)^{3/2}}.$$

## Приложение

Выведем формулу (3) двумя способами: для тех, кто уже знаком с теоремой Гаусса, и для тех, кто пока предпочитает обходиться без нее.

С теоремой Гаусса все очень просто: надо применить ее к маленькому плоскому цилиндру, одно основание которого находится внутри проводника, а другое — вне (рис.8,а):  $ES = \sigma S/\epsilon_0$ , откуда получаем выражение (3).

Другое доказательство основано на выделении вклада близлежащего участка поверхности. Если этот участок достаточно мал, то его можно считать плоским и вблизи центра (на расстояниях, малых по сравнению с размерами участка) совпадающим с полем  $\vec{E}_{пл}$  бесконечной равномерно заряженной плоскости (рис.8,б). Поле  $E'$  всех остальных зарядов не

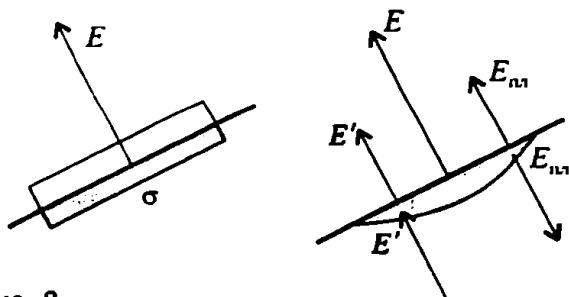


Рис. 8

испытывает скачка па поверхности, оно уничтожает поле  $\vec{E}_{пл}$  внутри проводника и складывается с  $\vec{E}_{пл}$  вне:  $E_{пл} - E' = 0$ ,  $E_{пл} + E' = E$ . Получаем, что для любого проводника поле возле его поверхности выражается через поле равномерно заряженной плоскости:  $E = 2E_{пл}$ . И тут самое время вспомнить, что в одном из случаев поле проводника нам хорошо известно — это поле уединенного заряженного шара. Возле поверхности шара

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \cdot 4\pi R^2}{R^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Отсюда мы немедленно делаем вывод, что такой же ответ годится для произвольного проводника, а заодно получаем в качестве «набавки» поле бесконечной равномерно заряженной плоскости:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

# ПОЛЯРИЗОВАННЫЙ ДИЭЛЕКТРИК И ЕГО ЭНЕРГИЯ

*Е. Выродов, В. Слепнев*

Физику, изучаемую в школе, иногда называют элементарной. Это действительно так – в школьной программе нет сложных, трудных для понимания законов, а решение задач не требует высшей математики. Однако и в элементарной физике можно найти немало очень глубоких вопросов, ответы на которые совсем не очевидны. Посмотрите, какая дискуссия развернулась недавно на факультативном занятии в нашей школе. Участвовали в ней учитель физики (Учитель) и два школьника (Володя и Антон). Началась она с очень простого вопроса, а закончилась...

**Учитель.** Тема нашего занятия – «Энергия конденсатора». Рассмотрим плоский воздушный конденсатор, площадь пластин которого  $S$ , а расстояние между ними  $d$ . Пусть этот конденсатор заряжен, и заряд его равен  $Q$ . Как найти электростатическую энергию, запасенную в конденсаторе?

Это можно сделать разными способами, например так. Представим себе, что мы заряжаем конденсатор, перенося заряд маленькими порциями с одной его обкладки на другую. Работа, которую мы при этом совершаем, идет на увеличение энергии конденсатора. Давайте найдем работу, необходимую для того, чтобы зарядить конденсатор до заряда  $Q$ , – это и будет ответом на поставленный вопрос.

Обозначим через  $\Delta Q_i$  заряд  $i$ -й порции переносимого нами заряда, а через  $Q_i$  – заряд конденсатора перед переносом  $i$ -й порции. Тогда заряд  $\Delta Q_i$ , перемещаясь с одной пластины на другую, проходит разность потенциалов  $U_i = Q_i/C_0$  (где  $C_0 = \epsilon_0 S/d$  – емкость конденсатора), а работа, которую нужно для этого совершить, равна

$$\Delta A_i = U_i \Delta Q_i.$$

Полную работу, затраченную на перенос всего заряда  $Q$ , а

значит, и энергию заряженного конденсатора мы найдем, просуммировав все  $\Delta A_i$ :

$$W_0 = A = \sum_i U_i \Delta Q_i.$$

Для того чтобы вычислить эту сумму, нарисуем график зависимости  $U$  от  $Q$ . Она очень простая – это прямая пропорциональность (рис.1). Сразу заметим, что каждая элементарная работа  $\Delta A_i$  численно равна площади прямоугольника, построенного на отрезке  $\Delta Q_i$  и упирающегося в наш график. Понятно, что сумма площадей всех этих прямоугольников будет близка к площади под графиком функции  $U(Q)$  (все  $\Delta Q_i$  – очень маленькие). В пределе при  $\Delta Q_i \rightarrow 0$  мы и получим эту площадь под графиком. Надеюсь, вычисление площади треугольника ни у кого проблем не вызывает? Тогда напишем ответ:

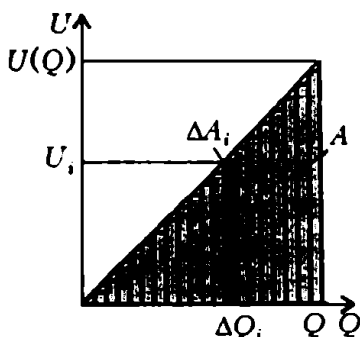


Рис. 1. График, использованный Учителем для вычисления энергии заряженного конденсатора

$$W_0 = \frac{1}{2} U(Q) Q = \frac{Q^2}{2C_0}.$$

**Володя.** Где-то подобное рассуждение уже возникало.

**Учитель.** Ну конечно, при вычислении перемещения при равноускоренном движении.

**Антон.** Вообще-то, можно было не возиться с этими детскими прямоугольничками и площадями под графиком. По сути, мы просто вычислили интеграл от линейной функции.

**Учитель.** Что ж, не в меру образованные люди могут сказать и так – это будет чистая правда.

**Володя.** Интересно, а если между обкладками конденсатора находится диэлектрик – результат будет таким же?

**Учитель.** А в чем, собственно, разница? В нашем вычислении энергии мы вообще нигде не использовали тот факт, что конденсатор – воздушный. Нам нужна была только его емкость  $C_0$  – она определяла связь между  $U_i$  и  $Q_i$ . Если диэлектрическая пластина заполняет все пространство между обкладками и ее диэлектрическая проницаемость равна  $\epsilon$ , то емкость конденсатора будет в  $\epsilon$  раз больше:  $C = \epsilon C_0$ . Эта емкость и войдет вместо  $C_0$  во все формулы, в том числе и в конечный результат:

$$W = \frac{Q^2}{2\epsilon C_0}. \quad (1)$$

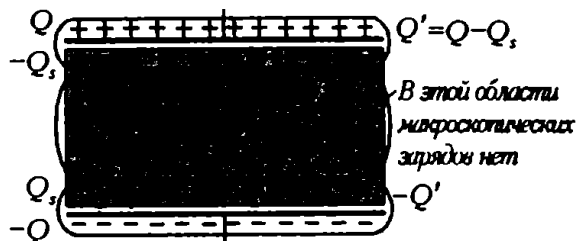


Рис.2. Таким Володя увидел заряженный конденсатор с диэлектриком

**Володя.** Сейчас... Я вижу по крайней мере еще один способ найти эту энергию. Может быть, он даст тот же ответ, а может и нет. Смотрите. Что происходит с диэлектрической пластиной (рис.2), вставленной в наш конденсатор? Она поляризуется – на ее поверхностях возникают связанные заряды  $Q_s$  и  $-Q_s$ . Величину  $Q_s$  мы можем найти, если вспомним, что полное электрическое поле внутри пластины, создаваемое зарядами обкладок и поляризационными зарядами, должно быть в  $\epsilon$  раз меньше, чем поле обкладок:

$$\frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon S} = \frac{Q}{\epsilon_0 S} - \frac{Q_s}{\epsilon_0 S} \quad (2)$$

(поле между двумя плоскостями с зарядами  $Q$  и  $-Q$  равно  $Q/(\epsilon_0 S)$ ). Отсюда находим

$$Q_s = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} Q. \quad (3)$$

Теперь заметим, что связанные заряды расположены вплотную к обкладкам конденсатора. Мы можем объединить обкладку и прилегающую к ней поверхность диэлектрика в единую заряженную плоскость, заряд которой равен

$$Q' = Q - Q_s = \frac{Q}{\epsilon}.$$

Но тогда вся наша система зарядов представляет собой две плоскости с зарядами  $Q'$  и  $-Q'$ , расположенные на расстоянии  $d$  друг от друга. А это просто воздушный конденсатор емкостью  $C_0$ , несущий заряд  $Q'$ . Но его энергия равна

$$W = \frac{Q'^2}{2C_0} = \frac{Q^2}{2\epsilon^2 C_0}, \quad (4)$$

что в  $\epsilon$  раз меньше результата (1).

**Антон.** Подождите, почему конденсатор оказался вдруг воздушным? В нем же диэлектрик, и его емкость не  $C_0$ , а  $\epsilon C_0$ .



**Володя.** Нет-нет, здесь мы должны взять именно  $C_0$ . Наличие диэлектрика мы уже учли, когда к заряду конденсатора добавили величину  $Q_s$ . Ведь все влияние, которое диэлектрик оказывает на электростатические явления, сводится к действию его связанных зарядов. Разве не так мы считаем, когда вычисляем электрическое поле в диэлектрике? Учтя связанные заряды, мы имеем полное право про диэлектрик забыть. Более того, мы просто обязаны это сделать. Иначе один и тот же фактор – наличие диэлектрика – мы учтем два раза. Согласны?

**Учитель.** Гм... Звучит убедительно. Действительно, прибавив ко всем зарядам нашей системы связанные заряды, возникающие на поверхности диэлектрика, мы вычисляем их электрическое поле так, как если бы они находились в вакууме. Именно так составлено уравнение (2), из которого Володя нашел величину  $Q_s$ . Но вот можно ли поступать так же при вычислении энергии этих зарядов? Это совсем не очевидно. В любом случае из ответов (1) и (4) может быть верен только один! В своем рассуждении я абсолютно уверен – там просто негде допустить ошибку. Мы честно вычислили работу, затраченную при заряде конденсатора. Вся эта работа и пошла на изменение его энергии – куда же еще?

А вот в Володином рассуждении есть скользкий момент. Вычисляя энергию, он добавил к зарядам обкладок связанные заряды диэлектрика, после чего диэлектрик выбросил вообще, заявив, что на энергии системы это никак не отразится.

**Володя.** А разве это неправда? Ведь электростатическая энергия может быть связана только с зарядами. В глубине диэлектрика макроскопических зарядов нет – они возникают только на поверхности, а эти поверхностные заряды мы учли.

**Учитель.** Это так. Но наш диэлектрик поляризован. Если это неполярный диэлектрик, то при поляризации положительные и отрицательные заряды молекул смещаются в противоположные стороны. Для того чтобы растянуть молекулы диэлектрика, требуется совершить некоторую работу, которую логично называть энергией поляризованного диэлектрика. И совсем не факт, что эта энергия совпадает с энергией электростатического взаимодействия связанных зарядов, возникающих при этом на поверхности нашей пластины.

**Володя.** Разве? А мне кажется, что это ровно она и есть. Работа, совершаемая при поляризации пластины, как раз и идет на создание связанных зарядов  $Q_s$  и  $-Q_s$ .

**Учитель.** Знаете, у меня есть предложение. Поскольку корень наших разногласий – диэлектрик (его энергия), логично будет

рассмотреть проблему в чистом виде, избавившись от конденсатора. Представим себе, что мы выдернули нашу пластину из конденсатора, причем сделали это настолько быстро, что заряды внутри нее не успели сместиться – состояние поляризации осталось прежним. Через некоторое (очень малое) время диэлектрик, конечно же, утратит поляризацию – ведь внешнее электрическое поле отсутствует. При этом энергия, которой он обладал, перейдет в тепло. Как найти эту энергию?

**Антон.** Я догадываюсь, что скажет Володя. Наша система состоит теперь из двух плоскостей связанных зарядов  $\pm Q_s$ , расположенных на расстоянии  $d$  друг от друга. По сути, это тот же конденсатор емкостью  $C_0$ , только заряженный зарядом  $Q_s$ . Его энергия равна

$$W_A = \frac{Q_s^2}{2C_0}. \quad (5)$$

**Володя.** Да, я бы искал энергию диэлектрика именно так.

**Учитель.** Отлично, а теперь смотрите, как сделал бы я. Предположим, мне удалось тем или иным способом поляризовать нашу пластину, причем так, что больше никаких изменений в окружающем мире не произошло. Например, возьмусь за каждую молекулу руками и растяну ее до нужного состояния (напомню, что речь идет о неполярном диэлектрике). Работа, которую я при этом совершу, будет запасена в диэлектрике в виде энергии  $W_A$ . После этого вставлю поляризованную пластину в незаряженный конденсатор и начну его заряжать. Заряды диэлектрика при этом буду удерживать на месте, не позволяя поляризации измениться. Какую работу мне придется совершить, чтобы зарядить конденсатор до заряда  $Q$ ? Разность потенциалов, которую проходит каждая порция заряда  $\Delta Q_i$ , теперь складывается из двух частей. Одна из них создается связанными зарядами диэлектрика  $\pm Q_s$ , и равна

$$U_s = -\frac{Q_s}{C_0}.$$

Другая создается зарядами обкладок конденсатора  $\pm Q_i$ , которые они имеют перед переносом порции  $\Delta Q_i$ :

$$U_i = \frac{Q_i}{C_0}.$$

Полная работа при переносе заряда равна

$$A = \sum_i (U_s + U_i) \Delta Q_i = -\frac{Q_s}{C_0} \sum_i \Delta Q_i + \sum_i U_i \Delta Q_i = -\frac{Q_s Q}{C_0} + \frac{Q^2}{2C_0}.$$

Зарядив конденсатор, я могу отпустить молекулы диэлектрика – в поляризованном состоянии их будет удерживать поле обкладок. Верну теперь систему в исходное состояние, переносю порцию заряда обратно. Поляризация диэлектрика будет при этом меняться вместе с полем обкладок – ведь заряды молекул никто не держит. По сути, я буду разряжать обычный конденсатор с диэлектриком, емкость которого  $\epsilon C_0$ . Энергию, выделившуюся при разряде, легко найти. Для этого нужно сделать такой же расчет, как при вычислении  $W_0$ , но только вместо емкости  $C_0$  надо взять  $\epsilon C_0$ . Можно сразу сказать, каким будет результат?

**Антон.** Конечно, ее дает формула (1).

**Учитель.** Совершенно верно. Но, поскольку все вернулось в начальное состояние, эта энергия должна быть равна суммарной работе, затраченной при зарядке:

$$W_{\text{д}} + A = W,$$

откуда мы и найдем энергию диэлектрика:

$$W_{\text{д}} = W - A = \frac{\epsilon Q^2}{2(\epsilon - 1)C_0}. \quad (6)$$

**Володя.** Ну вот, опять два разных ответа – (5) и (6). И непонятно, какой из них правильный.

**Антон.** Послушайте, я, кажется, понял, как разрешить наши сомнения! Энергию  $W_{\text{д}}$  мы сможем найти, если вычислим работу по растяжению одной молекулы диэлектрика, а потом умножим на число молекул.

**Володя.** Ну, это очень сложно. Нужно представлять себе внутреннее устройство молекулы, ее электронных оболочек, а

для этого, говорят, нужна квантовая механика. Вряд ли нам это удастся.

**Антон.** Нет-нет, смотрите. Возьмем простейшую модель молекулы нашего неполярного диэлектрика – два заряда  $q$  и  $-q$ , центры которых в нормальном состоянии совпадают. Если же их раздвинуть на расстояние  $x$  («растянуть» молекулу), то возникает внутримолекулярная сила  $F_{\text{в}}$ , возвращающая заряды в исходное положение (рис.3). Растягивая

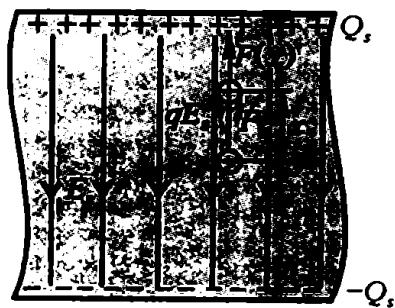


Рис.3. Силы, действующие на молекулярные заряды в поляризованном диэлектрике (модель Антона)

молекулу, мы совершаем работу против этой силы. Работа эта идет на увеличение потенциальной энергии деформации молекулы.

**Володя.** Ну и как же мы найдем эту работу? Ведь для этого нужно знать  $F_s$ .

**Антон.** Она нам не понадобится! Если мы начнем растягивать все молекулы диэлектрика в отсутствие внешнего электрического поля, нам придется преодолевать не только внутримолекулярные силы, но и поле  $E_s$ , возникающих при этом связанных зарядов. Сила, которую нужно приложить к каждой молекуле, будет равна

$$F(x) = F_s + qE_s. \quad (7)$$

С другой стороны, если ту же самую поляризацию диэлектрика создало внешнее поле  $E$ , то на каждый молекулярный заряд действует электростатическая сила  $q(E - E_s)$ . Она должна быть уравновешена внутримолекулярной силой, следовательно,

$$F_s = q(E - E_s).$$

Таким образом,

$$F(x) = qE = \frac{q\epsilon}{\epsilon - 1} E_s$$

(здесь я воспользовался тем что разность  $E - E_s$  равна  $E/\epsilon$ ).

Заметим теперь, что при смещении молекулярных зарядов на  $x$  на поверхностях пластины возникают области нескомпенсированного заряда толщиной  $x$ . А значит, величину связанных зарядов  $Q_s$  мы найдем, если умножим молекулярный заряд  $q$  на число молекул в этой области:

$$Q_s = qnSx,$$

где  $n$  — концентрация молекул в диэлектрике. Электрическое поле, создаваемое этими связанными зарядами, равно

$$E_s = \frac{Q_s}{\epsilon_0 S} = \frac{qn x}{\epsilon_0}.$$

Подставив этот результат в формулу для  $F(x)$ , получаем

$$F(x) = \frac{\epsilon q^2 n}{(\epsilon - 1)\epsilon_0} x.$$

Как видим, в этих условиях каждая молекула ведет себя как пружинка жесткостью

$$k = \frac{\epsilon q^2 n}{(\epsilon - 1)\epsilon_0}.$$

**Володя.** Здорово! И никакой квантовой механики. Теперь, зная зависимость  $F(x)$ , мы можем найти работу, затраченную на растяжение молекулы.

**Антон.** Конечно. Осталось только заметить, что для создания на поверхностях пластины связанных зарядов  $Q_s$  каждую молекулу нужно растянуть на

$$x = \frac{Q_s}{qnS}.$$

Работа, совершенная над одной молекулой, будет равна

$$A_0 = \frac{kx^2}{2} = \frac{\epsilon Q_s^2}{2(\epsilon - 1)\epsilon_0 nS^2}.$$

Чтобы найти полную работу, т.е. энергию поляризованного диэлектрика, нужно умножить  $A_0$  на число молекул в пластине:

$$W_1 = ndSA_0 = \frac{\epsilon Q_s^2 d}{2(\epsilon - 1)\epsilon_0 S}.$$

**Володя.** Но ведь это в точности результат (6)!

**Антон.** Конечно, ведь  $\epsilon_0 S/d$  равно  $C_0$  – емкости конденсатора, из которого мы выдергивали нашу пластину.

**Учитель.** И теперь понятно, почему именно этот ответ, а также ответ (1) для энергии конденсатора являются верными, а Володины результаты (4) и (5) – нет. Из решения Антона видно, где у Володи возникает ошибка. Заменяя диэлектрик связанными зарядами, возникающими на его поверхностях, и вычисляя энергию так, как если бы эти заряды находились в вакууме, мы не учитываем работу против внутримолекулярных сил, затрачиваемую на увеличение потенциальной энергии деформации молекул. Учитывается только работа по преодолению сил электрического поля, в котором находятся молекулы. Или, другими словами, только второе слагаемое в формуле (7).

**Володя.** Но тогда, если мы оставим только это слагаемое, решение Антона должно дать ответ (5).

**Учитель.** Совершенно верно. Попробуйте сами в этом убедиться.

# ИДЕАЛЬНЫЕ ПРОВОДНИКИ И КИНЕТИЧЕСКАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ

С. Гордюнин

В этой статье речь пойдет об идеальных индуктивностях, т.е. о контурах и катушках из проводов с бесконечной проводимостью (без омического сопротивления).

Начнем с нескольких задач. Их решение основано, в сущности, на законе Ома  $U = IR$  — если сопротивление проводника равно нулю, на таком проводнике не может возникнуть напряжение.

**Задача 1.** Идеально проводящее тонкое кольцо радиусом  $a$ , индуктивностью  $L$  и массой  $m$  влетает со скоростью  $v_0$  в область однородного магнитного поля с индукцией  $B$  перпендикулярно линиям поля. Требуется найти скорость кольца в поле.

Так как сопротивление кольца равно нулю, в нем не может возникнуть ЭДС индукции. Значит, не меняется поток магнитного поля через кольцо. Поток магнитного поля складывается из потока внешнего поля, который изменяется при влете кольца от нуля до  $B\pi a^2$ , и потока магнитного поля индукционного тока, возникающего в кольце и равного  $LI$ . Эти потоки противоположны по знаку; таким образом, в любой момент времени

$$\Phi_{\text{ext}}(t) - LI(t) = 0$$

(индекс ext происходит от слова external — внешний), или в области однородности поля

$$I = \frac{B\pi a^2}{L}.$$

Энергия возникшего магнитного поля тока в кольце равна

$$W_{\text{м}} = \frac{LI^2}{2} = \frac{(B\pi a^2)^2}{2L}.$$

По закону сохранения энергии получаем

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{(B\pi a^2)^2}{2L},$$

откуда

$$v = \sqrt{v_0^2 - \frac{(B\pi a^2)^2}{mL}}.$$

Если  $v_0^2 < (B\pi a^2)^2 / (mL)$ , кольцо отразится от границы области, занимаемой полем, — кольцо тормозится силой Ампера, действующей на ток в кольце со стороны внешнего поля.

**Задача 2.** Идеальная индуктивность  $L$  в момент времени  $t = 0$  замыкается на батарейку без внутреннего сопротивления с ЭДС  $\mathcal{E}$ . Найдите зависимость тока в цепи от времени.

Напряжение на индуктивности должно быть равно нулю. А оно равно сумме (алгебраической) ЭДС батарейки  $\mathcal{E}$  и ЭДС самоиндукции  $-L \frac{dI}{dt}$ . Таким образом,

$$\mathcal{E} + \left( -L \frac{dI}{dt} \right) = 0,$$

откуда

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{L} t.$$

Вот и все. И все по законам электродинамики. Одна только загвоздка. Откуда идеально проводящие электроны «знают», что им к данному моменту нужно создать ток  $I(t)$ ? Ведь ни в индуктивности, ни в кольце нет напряжения, а значит, в проводах нет электрического поля. А электроны могут менять свою кинетическую энергию только под действием электрического поля. И если мы доверяем законам механики и электродинамики, то должны признать, что в идеальных проводниках вполне законно наличие ЭДС. Электроны надо ускорять! Разберемся.

Рассмотрим самую простую, но достаточную для общего понимания ситуацию (начинать надо всегда с максимально упрощенных задач). Пусть плоский, круглый, сделанный из тонкого провода без сопротивления контур помещен в перпендикулярное внешнее магнитное поле (не обязательно однородное). И пусть силовые линии индукционного электрического поля в отсутствие колечка образуют концентрические окружности, общий центр которых совпадает с центром колечка. (Максимально простая геометрия, не правда ли?) Внешнее поле начинает

меняться, для простоты — от нуля. ЭДС индукции в колечке должна быть, поэтому полный поток через него не равен нулю. Если  $E_i$  — напряженность индукционного поля, а  $\mathcal{E}_i$  — ЭДС индукции, то  $E_i = \mathcal{E}_i / (2\pi a)$ , где  $a$  — радиус колечка.

Запишем второй закон Ньютона для электрона в колечке:

$$m \frac{dv(t)}{dt} = eE_i(t) = \frac{e\mathcal{E}_i(t)}{2\pi a}.$$

Скорость электронов в момент  $t$  связана с током известным соотношением  $I(t) = nev(t)s$ , где  $n$  — концентрация электронов,  $s$  — площадь сечения провода. Выразим  $v$  через  $I$ , тогда уравнение Ньютона приобретет вид

$$\left( \frac{m \cdot 2\pi a}{ne^2 s} \right) \frac{dI}{dt} = \mathcal{E}_i.$$

То, что стоит в скобках, имеет размерность индуктивности. Это указывает на то, что закону Ньютона для электронов в идеальном проводнике можно придать вид закона электромагнитной индукции Фарадея (с точностью до знака). Выражение в скобках называют кинетической индуктивностью и обозначают  $L_\kappa$ .

Аналогия, как и следовало ожидать, идет дальше. Кинетическая энергия всех электронов проводника равна

$$\frac{mv^2}{2} \cdot n \cdot 2\pi as = \frac{L_\kappa I^2}{2},$$

т.е. представляется как бы магнитной энергией. Стоит задуматься о феноменально согласованном действии механики Ньютона и электродинамики Фарадея — Максвелла!

Пойдем дальше. По закону электромагнитной индукции,

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d}{dt} (\Phi_{\text{ext}} + LI),$$

таким образом,

$$L_\kappa \frac{dI}{dt} = - \frac{d}{dt} (\Phi_{\text{ext}} + LI),$$

или

$$(L + L_\kappa) \frac{dI}{dt} = \mathcal{E}_{\text{ext}}.$$

Теперь итог: учет электрического поля в идеальных проводниках и инертности электронов просто сводится к добавлению к индуктивности контура  $L$  — ее называют геометрической индуктив-



ностью – кинетической индуктивности

$$L_k = \frac{ml}{ne^2 s} \quad (\text{здесь } l - \text{длина контура}).$$

Вы уже догадались, что в большинстве случаев  $L_k \ll L$ ? Сделаем оценки. Индуктивность тонкого колечка радиусом  $a$  по порядку величины равна (точно в школе не вычислить)  $L \sim \mu_0 a$  (здесь  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – магнитная постоянная). Поэтому

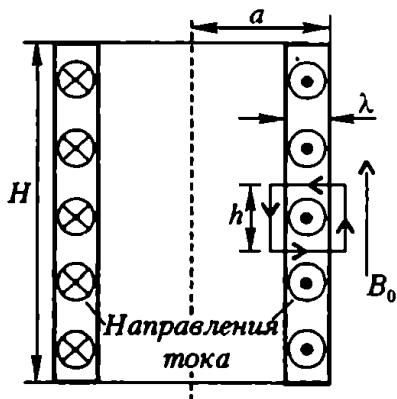
$$\frac{L_k}{L} \sim \frac{ma}{ne^2 s \mu_0 a} \sim \frac{\lambda_L^2}{s}, \quad \text{где } \lambda_L^2 = \frac{m}{ne^2 \mu_0}.$$

При оценке надо все же учесть, что это не обычные электроны, а какие-то «сверхтекучие», и все величины снабдить соответствующим индексом  $S$ :  $m_S$ ,  $e_S$ ,  $n_S$ . Но  $m_S = m_e$  – ничего другого в металлах нет, так же и  $e_S = e$ . А вот  $n_S$  может быть и меньше, чем плотность электронов в типичных металлах (возможно, они не все «сверхтекучие»). И может быть (так оно и есть),  $n_S$  зависит от температуры и при некоторой температуре вообще обращается в ноль. Мы для оценки примем, что все электроны «сверхтекучие», т.е. оценим минимальное значение  $\lambda_L$ . Оказывается (подставьте и убедитесь), что типичные значения  $\lambda_L \sim 10^{-4} - 10^{-5}$  см. Существенно и замечательно, что это хотя и малые длины, но макроскопические. Если бы получилось, к примеру,  $10^{-8} - 10^{-9}$  см, наше с самого начала макроскопическое, т.е. усредненное по многим атомным размерам, рассмотрение лишалось бы смысла.

Таким образом, для проводников с толщинами больше 10 мкм кинетической индуктивностью можно спокойно пренебречь (электроны легкие, плотность их велика, а заряд «недостаточно» мал). То, что кинетическая индук-

тивность велика при малых сечениях, понятно – заданный ток через малое сечение требует больших скоростей зарядов, и, значит, их кинетическая энергия растет.

Наличие кинетической индуктивности, однако, играет не только познавательную роль. Рассмотрим идеально проводящий цилиндр, длина которого  $H$  много больше его радиуса  $a$  (см. рисунок). Внесем его в однородное



магнитное поле, индукция  $\vec{B}_0$  которого параллельна образующей цилиндра. Если забыть про кинетическую индуктивность, то сразу придем к выводу, что поле внутри цилиндра полностью отсутствует — через любой контур внутри него не может возникнуть поток. Понятно: по поверхности течет ток, создающий внутри цилиндра встречное магнитное поле, равное внешнему. Можно сказать, идеальный соленоид (без всяких обмоток). Но такое состояние энергетически невыгодно! Ведь кинетическая индуктивность поверхностных токов, а значит и их кинетическая энергия, бесконечно велика (толщина нулевая). Поэтому ток будет течь по поверхностному слою конечной толщины, следовательно, и поле будет проникать в цилиндр на такую же глубину.

Покажем это, оценив энергию цилиндра во внешнем поле. Примем, что в некотором слое толщиной  $\lambda$  ( $\lambda \ll a$ ) ток и поле распределены однородно, т.е. поле в слое везде равно  $B_0$ , а ток равен  $I$ . Тогда

$$W = \frac{B_0^2}{2\mu_0} V_L + \frac{L_\kappa I^2}{2},$$

где  $V_L = 2\pi a \lambda H$  — объем цилиндра, занятый полем. (Если бы не кинетический член, то минимум энергии требовал бы, чтобы объем  $V_L$  был нулевым.) В нашем случае

$$L_\kappa = \frac{m_s \cdot 2\pi a}{n_s e^2 H \lambda}.$$

А ток найдем по теореме о циркуляции (см. рисунок):

$$B_0 h = \mu_0 I \frac{h}{H}, \text{ и } I = \frac{B_0 H}{\mu_0}.$$

Таким образом,

$$W = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \cdot 2\pi a H \left( \lambda + \frac{\lambda_L^2}{\lambda} \right).$$

Все, конечно, знают, что минимум скобки достигается при равенстве двух слагаемых; значит,  $\lambda = \lambda_L$ . Поле и ток проникают в идеальный проводник на глубину  $\lambda_L$ , из проводников меньших размеров поле не вытесняется!

Величина  $\lambda_L$  называется лондоновской глубиной проникновения магнитного поля. Ее впервые получил более шестидесяти лет назад в первой удачной теории сверхпроводимости известный английский физик Ф.Лондон.

*А. Черноуцан*

Закон сохранения энергии является, как известно, мощным инструментом решения задач. Он позволяет не выяснять деталей процессов, происходящих при переходе системы из начального состояния в конечное, а непосредственно связывать параметры этих состояний. Закон позволяет также рассчитать работу, которую совершили внешние силы при изменении состояния. Однако неаккуратное применение закона сохранения энергии может привести к неправильным и даже парадоксальным результатам.

Напомним известный пример. Работа внешних сил, затраченная на медленное увеличение расстояния между пластинами плоского конденсатора от  $d_1$  до  $d_2$ , равна изменению энергии конденсатора только в том случае, когда пластины отключены от источника:

$$A_{\text{вн}} = W_2 - W_1 = \frac{Q^2}{2C_2} - \frac{Q^2}{2C_1},$$

где  $C_1 = \epsilon_0 S/d_1$  (здесь  $S$  – площадь каждой пластины,  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная),  $C_2 = \epsilon_0 S/d_2$  (заметим, что  $C_2 < C_1$ ). Если же попытаться рассчитать таким образом работу для конденсатора, подключенного к источнику тока, она получится отрицательной, что наверняка неправильно – пластины в любом случае притягиваются друг к другу. Выход из положения известен – надо учесть работу сторонних сил источника:

$$A_{\text{вн}} + \epsilon \Delta q = W_2 - W_1,$$

или

$$A_{\text{вн}} + \epsilon(C_2 \epsilon - C_1 \epsilon) = \frac{C_2 \epsilon^2}{2} - \frac{C_1 \epsilon^2}{2},$$

откуда

$$A_{\text{вн}} = \frac{C_1 \delta^2}{2} - \frac{C_2 \delta^2}{2},$$

где  $\delta$  – электродвижущая сила источника.

С аналогичными или даже более неожиданными ситуациями и «парадоксами» можно встретиться при использовании закона сохранения энергии в применении к магнитному полю. Для наглядности мы сравним поведение во внешнем поле двух простейших систем: плоского конденсатора и соленоида. При расчете энергии собственное поле этих объектов можно считать однородным, что позволит нам использовать формулы для объемной плотности энергии; внешнее поле тоже будем считать однородным. Однако для начала нам надо собрать вместе и обсудить некоторые формулы.

**Поле конденсатора и поле соленоида.** Напряженность электрического поля плоского конденсатора выражается через поверхностную плотность заряда его пластин:

$$E_{\kappa} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0 S},$$

а энергия плоского конденсатора – через объемную плотность энергии поля:

$$W = \frac{\epsilon_0 E_{\kappa}^2}{2} \cdot Sd = w \cdot V.$$

Таким же образом можно найти энергию в любом объеме, содержащем однородное электрическое поле. Например, если заряженный конденсатор поместить во внешнее однородное поле  $\vec{E}$ , направленное противоположно собственному полю конденсатора, внутри конденсатора будет заключена энергия

$$W = \frac{\epsilon_0 (E - E_{\kappa})^2}{2} \cdot Sd.$$

Формулы для магнитного поля выглядят достаточно просто и весьма похоже. Хотя в школьном учебнике эти формулы отсутствуют, их приводят во многих пособиях для классов и школ с углубленным изучением математики и физики. Магнитные формулы, записанные в единицах СИ, содержат магнитную постоянную  $\mu_0$ , связанную с электрической постоянной  $\epsilon_0$  и скоростью света в вакууме с простым соотношением:

$$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м.}$$

Эта постоянная играет в магнитных формулах такую же роль, как электрическая постоянная – в электрических.

Магнитная индукция внутри соленоида длиной  $l$  с числом витков  $N$ , по которому течет ток силой  $I$ , равна

$$B_c = \mu_0 I \frac{N}{l} = \mu_0 i,$$

где  $i$  – ток, приходящийся на единицу длины соленоида (поверхностная плотность тока). Направление поля определяется по правилу буравчика: вращаем ручку по току, буравчик движется по полю. Объемная плотность энергии магнитного поля равна

$$w = \frac{W}{V} = \frac{B_c^2}{2\mu_0}.$$

Если поместить соленоид во внешнее магнитное поле  $\vec{B}$ , направленное параллельно собственному полю, то внутри соленоида будет заключена энергия

$$W = \frac{(B + B_c)^2}{2\mu_0} \cdot Sl,$$

где  $S$  – площадь сечения соленоида.

Для того чтобы иметь возможность вычислить работу по повороту конденсатора и соленоида во внешнем поле, нам надо вспомнить о поведении во внешнем поле простейших объектов – электрического диполя и витка с током.

**Электрический диполь и виток с током.** Электрическим диполем называется система из двух точечных зарядов  $+q$  и  $-q$ , находящихся на расстоянии  $d$  друг от друга. Электрический диполь обладает дипольным моментом

$$\vec{p} = q\vec{d},$$

где вектор  $\vec{d}$  направлен от отрицательного заряда к положительному. На электрический диполь в однородном электрическом поле  $\vec{E}$  (рис.1) действует вращательный момент

$$M = qEd \sin \alpha = pE \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{p}$  и  $\vec{E}$ . Поскольку сумма сил, действующих на заряды диполя со стороны поля,

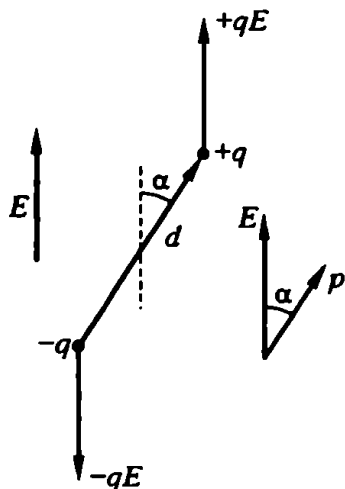


Рис. 1

равна нулю, вращательный момент имеет одинаковые значения для любой оси (перпендикулярной  $\vec{p}$  и  $\vec{E}$ ). При этом у диполя есть только одно устойчивое положение равновесия, при котором дипольный момент параллелен напряженности внешнего поля (противоположное, антипараллельное, положение соответствует неустойчивому равновесию).

Работу силы  $\delta A$  при повороте диполя на малый угол  $\delta\alpha$  можно выразить через вращательный момент:

$$\delta A = M\delta\alpha.$$

Тогда для работы поля по повороту диполя на угол  $\alpha$  из положения равновесия можно записать

$$A_E = - \int_0^\alpha pE \sin \alpha \cdot d\alpha = -pE(1 - \cos \alpha).$$

Эта работа отрицательна, а работа внешних сил при медленном повороте диполя из положения равновесия положительна:

$$A_{\text{вн}} = pE(1 - \cos \alpha).$$

Видно, что потенциальная энергия диполя во внешнем поле равна

$$W_n = -pE \cos \alpha.$$

(Можно было начать с вывода формулы для энергии – подумайте, как это сделать, – и из нее получить выражение для работы.) Минимальная энергия ( $-pE$ ) соответствует устойчивому положению равновесия.

Очень похожими свойствами обладает виток с постоянным током, находящийся в однородном магнитном поле. Для простоты рассмотрим виток прямоугольной формы со сторонами  $a$  и  $b$  и будем поворачивать его относительно оси  $OO'$ , проходящей через середины противоположных сторон и перпендикулярной магнитному полю  $\vec{B}$  (рис.2). Момент сил Ампера, действующих на две стороны контура, которые параллельны оси вращения, равен

$$M = 2IBa \frac{b}{2} \sin \alpha = BIS \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол между нормалью  $\vec{n}$  к плоскости витка и полем  $\vec{B}$ . Отметим, что нормаль надо проводить вполне определенным образом – по движению буравчика, рукоятка

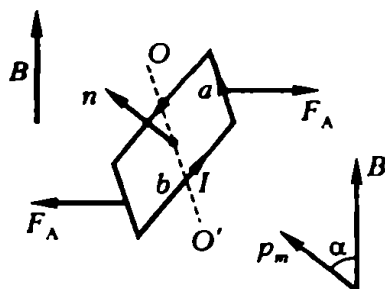


Рис. 2

которого поворачивается в плоскости витка в направлении протекания тока. Если для характеристики свойств витка ввести магнитный момент  $\vec{p}_m$ , направленный вдоль указанной нормали и равный

$$p_m = IS,$$

то все свойства витка во внешнем магнитном поле окажутся формально идентичными свойствам электрического диполя во внешнем электрическом поле. Так, у витка есть одно устойчивое положение равновесия, при котором  $\vec{p}_m$  параллелен  $\vec{B}$ , и работа внешних сил при медленном повороте витка из положения равновесия на угол  $\alpha$  равна

$$A_{\text{вн}} = p_m B(1 - \cos \alpha).$$

Более того, если чисто формально ввести потенциальную функцию (имеющую смысл потенциальной энергии) витка во внешнем поле:

$$W_n = -p_m B \cos \alpha,$$

то работа внешних сил будет равна  $\Delta W_n$ .

Интересно отметить, что формальная аналогия между дипольным и магнитным моментами имеет важное значение для описания диэлектрических и магнитных свойств вещества. Поляризация диэлектрика, состоящего из полярных молекул (т.е. обладающих собственным дипольным моментом), происходит за счет преимущественной ориентации этих дипольных моментов в направлении поля. Степень ориентации определяется соотношением между выигрышем в энергии, равным  $pE$ , и характерной энергией теплового движения, которая равна  $kT$  (здесь  $k$  – постоянная Больцмана,  $T$  температура). Совершенно так же происходит намагничивание парамагнетиков, молекулы которых обладают собственным магнитным моментом и стремятся сориентироваться по магнитному полю.

Заметим, что полученные нами выражения годятся и для конденсатора во внешнем поле  $\vec{E}$  (в этом случае дипольный момент равен  $p = qd$ , где  $q$  – заряд пластин конденсатора), и для соленоида во внешнем поле  $\vec{B}$  (в этом случае  $p_m = NIS$ ).

**Поворачивание конденсатора и соленоида.** Повернем конденсатор и соленоид на  $180^\circ$  из положения устойчивого равновесия. Рассчитаем работу, которую совершили внешние силы в каждом случае, и сравним ее с соответствующим изменением энергии.

Работа в обоих случаях положительна. Для конденсатора в поле  $\vec{E}$  она равна

$$A_{\text{вн}} = 2pE = 2qdE = 2\epsilon_0 E_{\kappa} S d E = 2\epsilon_0 E_{\kappa} E \cdot S d$$

( $E_{\kappa}$  – поле конденсатора), а для соленоида в поле  $\vec{B}$  –

$$A_{\text{вн}} = 2p_m B = 2NISB = 2 \frac{B_c}{\mu_0} S l B = 2 \frac{B_c B}{\mu_0} \cdot S l$$

( $B_c$  – поле соленоида).

Однако с изменением энергии все не так просто. Самое важное различие между конденсатором и соленоидом состоит в том, что в положении устойчивого равновесия поле конденсатора  $\vec{E}_{\kappa}$  направлено против внешнего поля  $\vec{E}$ , а поле соленоида  $\vec{B}_c$  направлено вдоль внешнего поля  $\vec{B}$  (рис.3). При повороте на  $180^\circ$  изменение энергии электрического поля в конденсаторе положительно:

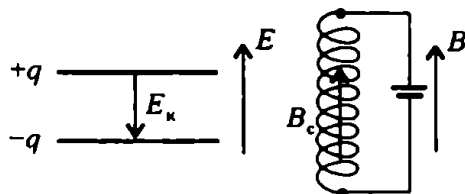


Рис. 3

$$\Delta W = \frac{\epsilon_0 (E + E_{\kappa})^2}{2} \cdot S d - \frac{\epsilon_0 (E - E_{\kappa})^2}{2} \cdot S d = 2\epsilon_0 E E_{\kappa} \cdot S d$$

и равно работе внешних сил. Напротив, изменение энергии магнитного поля в соленоиде отрицательно:

$$\Delta W = \frac{(B - B_c)^2}{2\mu_0} \cdot S l - \frac{(B + B_c)^2}{2\mu_0} \cdot S l = -2 \frac{B B_c}{\mu_0} \cdot S l$$

и равно работе внешних сил только по модулю.

Как же объяснить такое расхождение?

**Работа источника. Но это не все ...** Естественное объяснение, возникающее из аналогии с электростатикой, состоит в необходимости учесть работу источника. Продemonстрируем, как это сделать для расчета работы, которую необходимо совершить для поворота на  $180^\circ$  конденсатора, соединенного с источником тока (рис.4). Поскольку полное поле внутри конденсатора до и после поворота равно  $\epsilon/d$ , энергия поля вообще не изменяется, и закон сохранения энергии принимает вид

$$A_{\text{вн}} + A_{\text{ист}} = 0.$$

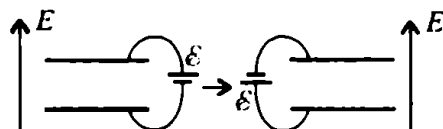


Рис. 4



Поле, создаваемое зарядами конденсатора, до поворота равно  $\varepsilon/d + E$ , а после поворота составляет  $\varepsilon/d - E$ ; следовательно, заряд на пластине, подключенной к положительному полюсу источника, изменяется на  $\Delta q$  от  $\varepsilon_0(\varepsilon/d + E)S$  до  $\varepsilon_0(\varepsilon/d - E)S$ . Работа источника при этом отрицательна и равна

$$A_{\text{ист}} = \varepsilon \Delta q = -2\varepsilon_0 \varepsilon E S,$$

а работа внешних сил положительна и равна

$$A_{\text{вн}} = 2\varepsilon_0 \varepsilon E S.$$

Теперь обратимся к соленоиду. Источник, поддерживающий постоянное значение тока  $I$ , совершает при повороте соленоида дополнительную работу против сторонних сил, возникающих вследствие явления электромагнитной индукции. При малом изменении магнитного потока работа источника равна

$$\delta A_{\text{ист}} = (-\varepsilon_{\text{инд}}) \Delta q = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} I \Delta t = I \Delta \Phi,$$

а за все время поворота –

$$A_{\text{ист}} = I((B_c - B)SN - (B_c + B)SN) = -2IBSN = -2 \frac{BB_c}{\mu_0} \cdot Sl.$$

Видно, что работа источника в точности равна по величине, но противоположна по знаку механической работе внешних сил при повороте соленоида. Этому есть простое объяснение. Дело в том, что полная работа сил, действующих на заряды соленоида со стороны постоянного магнитного поля  $\vec{B}$ , равна нулю (сила Лоренца перпендикулярна скорости и работу не совершает). Магнитное поле совершает при повороте соленоида отрицательную механическую работу и точно такую же по величине положительную работу (в качестве сторонней силы) над зарядами замкнутого контура.

Но как же быть с законом сохранения энергии? Если записать его в виде

$$A_{\text{вн}} + A_{\text{ист}} = \Delta W,$$

то получается, что левая часть равна нулю, а правая отлична от нуля и отрицательна.

Чего же мы еще не учли?

**Откуда берется внешнее магнитное поле?** Разгадка кроется в следующем. Внешнее поле  $\vec{B}$  тоже создается какими-то токами. Можно, например, представить себе, что наш соленоид находится в центре соленоида значительно больших размеров. При повороте нашего соленоида на токи, создающие поле  $\vec{B}$ , действу-

ет ЭДС индукции, и источник, поддерживающий постоянство этих токов, совершает дополнительную работу. В написанном выше законе сохранения энергии  $A_{\text{ист}}$  должна включать в себя как работу источника в нашем поворачивающемся соленоиде, так и работу источника, поддерживающего постоянным внешнее поле  $\vec{B}$ . Но сразу же возникает резонный (и на первый взгляд безнадежный) вопрос: как можно вычислить работу этого источника, если даже не известна форма токов, создающих внешнее поле?

Ответ на этот вопрос дает очень важная для электродинамики теорема взаимности, которую мы сформулируем следующим образом. Рассмотрим два контура с токами  $I_1$  и  $I_2$ . При данном расположении контуров магнитный поток, порождаемый в первом контуре магнитным полем, которое создано током второго контура, равен  $\Phi_{12} = L_{12}I_2$ ; обратное соотношение имеет вид  $\Phi_{21} = L_{21}I_1$ . Введенные коэффициенты, характеризующие влияние контуров друг на друга, называются коэффициентами взаимной индукции. Теорема взаимности утверждает, что эти два коэффициента равны друг другу:  $L_{12} = L_{21}$ .

С помощью этой теоремы мы сможем узнать, как поворот нашего соленоида влияет на внешний контур, создающий поле  $\vec{B}$ . Пусть ток в этом внешнем контуре равен  $\tilde{I}$ . Поворот нашего соленоида приводит к изменению потока во внешнем контуре, вызванному изменением коэффициента взаимной индукции:  $\Delta\Phi = \Delta L_{21}I$ . Источник в этом внешнем контуре совершит работу

$$\tilde{A}_{\text{ист}} = \tilde{I}\Delta\Phi = \tilde{I}\Delta L_{12}I = I\Delta\Phi = A_{\text{ист}}.$$

Значит, работа источника во внешнем контуре в точности равна работе источника в самом поворачивающемся соленоиде, которая отрицательна и в точности равна изменению энергии магнитного поля.

Согласитесь, что «спасение» закона сохранения энергии потребовало от нас изрядных усилий и привлечения довольно-таки «тяжелой артиллерии»!

# ДАВЛЕНИЕ ПОЛЯ

А. Черноуцан

Увидев название статьи, читатель, возможно, подумает, что речь пойдет о давлении света (электромагнитного поля). Это явление обсуждается в школьном курсе. Его объяснение становится особенно понятным, если рассматривать свет как поток фотонов, каждый из которых обладает определенным импульсом. При отражении от тела или поглощении им фотонов происходит изменение их импульса, а это означает, что на тело действует сила давления. При таком подходе давление света становится весьма похожим на давление идеального газа, молекулярно-кинетическое объяснение которого связано с ударами молекул о поверхность. Если же поставить себе цель объяснить давление света, не выходя за рамки электромагнитной теории, то происхождение силы надо связать с воздействием магнитного поля волны на упорядоченно движущиеся заряды вещества, что вызывается другим компонентом волны — ее электрическим полем.

Однако не имеет смысла дальше углубляться в обсуждение давления электромагнитных волн, потому что эта статья посвящена совсем другому явлению — давлению *статического* поля, как электрического, так и магнитного. Понятно, что в этом случае не может быть речи об изменении импульса, поэтому сам термин «давление» можно считать условным. Тем не менее в научно-популярных статьях и книгах вы можете встретиться с таким понятием. Читая, например, о создании сверхсильного магнитного поля, можно узнать, что одну из основных проблем представляет давление этого поля на стенки соленоида. Это тесно связано с возможностью создания управляемого термоядерного синтеза, где встает задача удержания раскаленной плазмы сильным магнитным полем («магнитной ловушкой»). Однако начнем мы не с магнитного поля, а с более понятного школьнику — поля электростатического.

---

Опубликовано в «Кванте» №6 за 1999 год.

**Давление электрического поля.** Разберемся с механизмом возникновения давления электростатического поля на заряженную поверхность, которое возникает в том случае, если напряженности полей по разные стороны этой поверхности различны. Начнем, как всегда, с самого простого случая — заряженного плоского конденсатора. Напряженность поля внутри конденсатора равна

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

где  $\sigma = q/S$  — поверхностная плотность заряда. При вычислении силы, действующей на единицу площади одной из пластин, надо учитывать только поле другой пластины, равное  $E/2$  (сама на себя пластина не действует):

$$p = \frac{F}{S} = \frac{E}{2} \sigma = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}.$$

Обсудим полученный результат.

Во-первых, давление выражается через напряженность поля, существующего с одной стороны от пластины (поле вне конденсатора пренебрежимо мало). Во-вторых, сила, действующая на пластину, направлена внутрь конденсатора — пластины притягиваются. Это значит, что если мы хотим приписать электрическому полю давление, то мы должны считать это давление отрицательным (поле не «давит», а «тянет»!). И наконец, в-третьих, давление поля совпадает по величине с объемной плотностью электрического поля. В итоге можно написать

$$p = -w = -\frac{W}{V} = -\frac{\epsilon_0 E^2}{2}. \quad (1)$$

Перечисленные свойства становятся вполне естественными, если посмотреть на них с точки зрения закона сохранения энергии. Рассмотрим изолированный (отключенный от источника) плоский конденсатор. Прикладывая внешнюю силу, медленно увеличим расстояние между пластинами на  $\Delta x$ . Поскольку напряженность поля между пластинами не изменится (она зависит только от  $\sigma$ ), энергия поля увеличится на  $wS\Delta x$ . Следовательно, внешняя сила должна совершить положительную работу  $F\Delta x$ , а сила давления поля — отрицательную работу  $-pS\Delta x$ . Таким образом, давление поля должно быть отрицательным и равным объемной плотности энергии.

Формула (1) действует и в случае заряженной поверхности любой формы, если напряженность поля по одну сторону от нее

равна нулю. Важный пример: на участок поверхности проводника площадью  $\Delta S$ , возле которого напряженность поля равна  $E$ , действует наружу сила, равная  $\Delta F = (\epsilon_0 E^2 / 2) \Delta S$ . Не останавливаясь на обосновании этого утверждения, обсудим сразу общую формулировку: если по одну сторону от заряженной поверхности напряженность поля равна  $E_1$ , а по другую  $E_2$ , то в направлении от первой области ко второй действует сила, обусловленная давлением

$$p = \frac{\epsilon_0 E_2^2}{2} - \frac{\epsilon_0 E_1^2}{2}. \quad (2)$$

Эту формулу можно обосновать тремя способами. Самый простой и естественный — энергетический. Надо мысленно сместить поверхность на  $\Delta x$  и приравнять работу внешней силы к изменению энергии поля. (Работа силы давления со стороны поля равна работе внешней силы, взятой с противоположным знаком.)

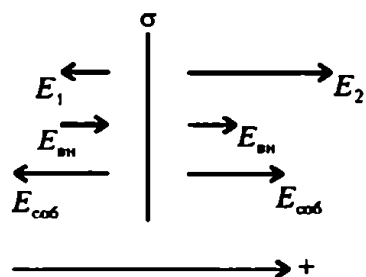


Рис. 1

Можно, как и в случае плоского конденсатора, разделить собственное поле от внешнего (рис.1). Будем считать, что оба поля перпендикулярны заряженной поверхности; действительно, касательная составляющая поля (если она есть) имеет одно и то же значение по обе стороны поверхности (это утверждение сле-

дует из потенциальности поля — подумайте сами, каким образом) и сокращается в формуле для давления. Для собственного поля  $E_{\text{соб}}$  и внешнего поля  $E_{\text{вн}}$  получим соотношения

$$\begin{cases} E_1 = E_{\text{вн}} - E_{\text{соб}}, \\ E_2 = E_{\text{вн}} + E_{\text{соб}}. \end{cases}$$

Собственное поле вблизи поверхности неотличимо от поля плоскости, т.е.  $E_{\text{соб}} = \sigma / (2\epsilon_0)$ . Выражая из этих уравнений  $E_{\text{вн}}$  и  $\sigma$ :

$$E_{\text{вн}} = \frac{E_1 + E_2}{2}, \quad \sigma = \epsilon_0 (E_2 - E_1), \quad (3)$$

найдем давление:

$$p = \sigma E_{\text{вн}}$$

и получим формулу (2).

Чтобы почувствовать, что давление определяется именно полным полем, а разделение поля на внешнее и собственное является только искусственным приемом, рассмотрим силу, действующую на тонкий слой объемного заряда (рис.2). Внутри слоя напряженность плавно меняется от  $E_1$  на одной поверхности до  $E_2$  на другой. Если объемная плотность заряда  $\rho$  постоянна, то напряженность поля меняется линейно и сила, действующая на площадку площадью  $S$ , выражается через среднюю напряженность поля:

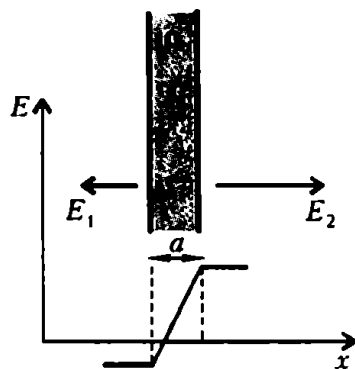


Рис. 2

$$F = \sigma S \frac{E_1 + E_2}{2} = \epsilon_0 (E_2 - E_1) S \frac{E_1 + E_2}{2} = \left( \frac{\epsilon_0 E_2^2}{2} - \frac{\epsilon_0 E_1^2}{2} \right) S,$$

где  $\sigma = \rho a$  — заряд единицы поверхности слоя. Связь между  $\sigma$ ,  $E_1$  и  $E_2$  можно получить с помощью теоремы Гаусса (если вы знакомы с этой теоремой) или же рассуждениями с внешним и собственным полями, приведшими к формуле (3).

При произвольной зависимости  $\rho(x)$  поступим следующим образом. Разделим слой на много тонких слоев толщиной  $dx$  и просуммируем силы, действующие на эти слои (рис.3):

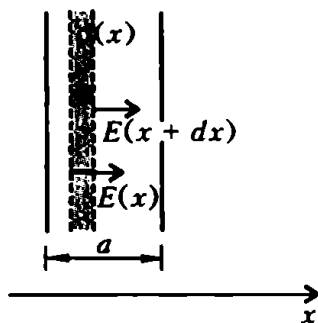


Рис. 3

$$F = \int_0^a E(x) \rho(x) S dx.$$

Изменение напряженности на очередном слое равно (для доказательства используйте теорему Гаусса; см. также формулу (3))

$$dE = \frac{\rho dx}{\epsilon_0}.$$

Для давления получаем

$$p = \frac{F}{S} = \int_1^2 E \epsilon_0 dE = \frac{\epsilon_0 E_2^2}{2} - \frac{\epsilon_0 E_1^2}{2}.$$

Отметим важную особенность: в случае объемного заряда не надо выделять собственное поле. Причина в том, что при уменьшении толщины слоя его собственное поле стремится к нулю.

**Давление магнитного поля.** В случае магнитного поля мы сталкиваемся с двумя трудностями. Одна из них — чисто методическая. Дело в том, что в обычном (не расширенном) школьном курсе нет формул для магнитной индукции, создаваемой элементом тока (закон Био-Савара), током в прямом проводе, катушкой (соленоидом) с током, а также нет формулы для объемной плотности энергии магнитного поля. Мы ограничимся случаем длинного соленоида (все обобщения проводятся аналогично электрическому полю), поле в котором почти всюду (кроме концов) однородно и равно

$$B = \mu_0 I \frac{N}{l} = \mu_0 i. \quad (4)$$

Здесь  $\mu_0 = 1/(\epsilon_0 c^2) = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м — магнитная постоянная,  $l$  — длина соленоида,  $N$  — число витков,  $i$  — поверхностная плотность тока (ток на единицу длины), во многом аналогичная поверхностной плотности заряда в электростатике. Направление поля находят по движению буравчика, который вращают в направлении тока. Вычислив магнитный поток в соленоиде  $\Phi = NBS$ , можно выразить индуктивность  $L = \Phi/I$  и энергию соленоида  $W = LI^2/2$ . Разделив энергию на объем соленоида, получим выражение для объемной плотности энергии магнитного поля (проверьте это):

$$w = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Вторая трудность носит принципиальный характер. Как было показано в предыдущей статье «Осторожно: магнитное поле», неаккуратное применение энергетических соотношений в задачах с магнитным полем может привести к кажущимся парадоксам и противоречиям. С аналогичной ситуацией мы столкнемся и при обсуждении давления магнитного поля.

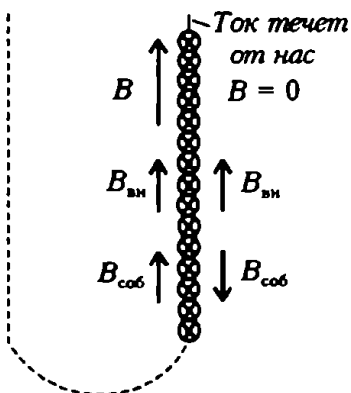


Рис. 4

Вычисление силы, действующей на небольшой прямоугольный участок  $\Delta S$  поверхности соленоида, проведем с помощью рассуждений, аналогичных электростатике (рис.4). Поле возле поверхности разделим на собственное поле  $B_{\text{соб}}$  (очень близко к поверхности

оно должно быть равно полю бесконечной плоскости с током) и внешнее поле  $B_{\text{вн}}$  (поле, создаваемое остальными участками соленоида). Получим

$$\begin{cases} B = B_{\text{вн}} + B_{\text{соб}}, \\ 0 = B_{\text{вн}} - B_{\text{соб}}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что  $B_{\text{вн}} = B_{\text{соб}} = B/2$ . Величину силы найдем из закона Ампера (с учетом формулы (4)):

$$\Delta F = B_{\text{вн}} (i \Delta l) \Delta d = \frac{B^2}{2\mu_0} \Delta S,$$

где  $\Delta l$  — ширина участка вдоль соленоида, а  $\Delta d$  — его длина вдоль тока.

На первый взгляд все выглядит замечательно и совершенно аналогично электростатике — давление поля численно совпадает с плотностью энергии магнитного поля. Но после определения направления силы по правилу левой руки мы обнаруживаем существенное различие: сила направлена наружу, т.е. давление магнитного поля надо, в отличие от электрического случая, считать положительным.

Казалось бы, ничего плохого в этом нет — наоборот, такой ответ лучше согласуется с привычным представлением о давлении. Однако нетрудно обнаружить, что в этом случае немедленно возникают трудности с законом сохранения энергии. Действительно, при мысленном смещении поверхности с током, например, в сторону поля (при уменьшении радиуса соленоида) внешние силы совершают положительную работу против магнитных сил, а объем соленоида, содержащий магнитное поле, уменьшается — значит, уменьшается и энергия поля! Как же объяснить такое противоречие?

Причина в том, что мы не учли работу источника, необходимую для поддержания постоянного тока соленоида, — а только при этом условии величина магнитной индукции в соленоиде не изменится. Дополнительная работа источника должна компенсировать работу ЭДС самоиндукции, возникающую при уменьшении магнитного потока в соленоиде. На рассматриваемом участке при смещении внутрь на расстояние  $\Delta x$  изменение потока равно

$$\Delta \Phi = -B \Delta x \Delta d,$$

возникающая на этом участке ЭДС самоиндукции равна

$$\mathcal{E}_{\text{сам}} = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t},$$



а работа источника против ЭДС самоиндукции равна (с учетом формулы (4))

$$A_{\text{ист}} = -\mathcal{E}_{\text{сам}} \Delta q = -\frac{B \Delta x \Delta d}{\Delta t} i \Delta / \Delta t = -\frac{B^2}{\mu_0} \Delta V,$$

где  $\Delta q$  — заряд, прошедший через этот участок за время  $\Delta t$ .  
Получаем, что работа внешней силы вместе с работой источника в точности равняется изменению энергии!

Приложение к журналу «Квант» №3/2001

## ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

Составители *В.А.Тихомирова, А.И.Чернуцан*

Редактор *В.А.Тихомирова*

Литературный редактор *Л.В.Кардасевич*

Технический редактор *Е.В.Морозова*

Компьютерная группа

*Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева*

ИБ № 51

Формат 84x108 1/32. Бум. офс. нейтр. Гарнитура кудряшевская.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,72.

Заказ 4300. Тираж 5800 экз

117296 Москва, Ленинский пр., 64-А,

«Квант»

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени

ГУП Чеховский полиграфический комбинат

Министерства Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и  
средств массовых коммуникаций

142300, г.Чехов Московской области

Тел. (272) 71-336. Факс (272) 62-536